第9讲：闭区间$[a,b]$上连续函数的五大特性

(一) 函数$f(x)$在区间上一致连续的概念.

若$f(x)$在区间I上C，则对$\forall x_0\in I$，有$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0$，

$\exists\delta(\varepsilon,x_0)>0$，对$\forall |x-x_0|<\delta(\varepsilon,x_0)$，$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$恒成立.

若对$\varepsilon>0$，存在只与ε有关的$\delta(\varepsilon)>0$，对$\forall x_1,x_2\in I$，只要$|x_1-x_2|<\delta(\varepsilon)$，

就$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$恒成立，则称$f(x)$在区间I上一致C。

由此可见，一致C是比C条件更强的连续。凡在I上一致连续的函数，当然在I上连续，但在I上连续的函数却未必一致C。

(注：在I上一致C是$f(x)$在I上的一种整体性质，在I上C则是指逐点都C)

例1. 证明$f(x)=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$中一致C。

证：对$\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\varepsilon$，则$\delta>0$且δ仅与ε有关，对$\forall x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$

当$|x_1-x_2|<\delta$时，$|f(x_1)-f(x_2)|=\left|2\cos\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right|\le 2\left|\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right|\le 2\times\frac{|x_1-x_2|}{2}$

$=|x_1-x_2|<\delta=\varepsilon$恒成立. 故$f(x)=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$中一致C。

例2. 证明$f(x)=\frac{1}{x}$在$I=(0,1)$中连续但非一致连续.

证(1) 对$\forall x_0\in(0,1)$，$\forall\varepsilon>0$，要使$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$即$\frac{|x-x_0|}{x x_0}<\varepsilon$

取 $x>\frac{1}{2}x_0$，则 $\frac{|x-x_0|}{x x_0}<\frac{|x-x_0|}{\frac{1}{2}x_0^2}<\varepsilon \Rightarrow |x-x_0|<\frac{1}{2}x_0^2\varepsilon$.

只要取 $\delta(x_0,\varepsilon)=\frac{1}{2}x_0^2\varepsilon$，则 $\delta(x_0,\varepsilon)>0$，且当 $|x-x_0|<\delta(x_0,\varepsilon)$ 时，

恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 成立。因此，$f(x)=\frac{1}{x}$ 在 x_0 处 C，从 $x_0\in(0,1)$

中的任意性来知，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 中 C。

证(2)：对 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}>0$，对 $\forall\delta>0$，$\exists n\in N^*$ 使 $\frac{1}{n}<\delta$。

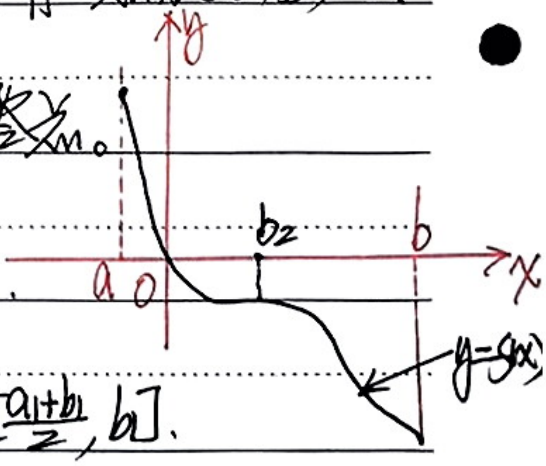
取 $x_1=\frac{1}{n}$，$x_2=\frac{1}{n+1}$，则 $x_1,x_2\in(0,1)$ 且 $|x_1-x_2|=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\le\frac{1}{n}<\delta$

但 $|f(x_1)-f(x_2)|=n+1-n=1>\frac{1}{2}=\varepsilon_0$，故 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 中非一致 C。

(三) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则有以下五大特性：

性质(1)（零值性）：若 $f(a)f(b)<0$，则至少有一点 $x_0\in(a,b)$，使

$f(x_0)=0$，此时称 x_0 为函数 $f(x)$ 的一个零点。



证：不妨设 $f(a)>0$，$f(b)<0$ 且令 $[a_1,b_1]=[a,b]$，

则 $f(a_1)>0$，$f(b_1)<0$；二等分 $[a_1,b_1]=[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}]\cup[\frac{a_1+b_1}{2},b_1]$，

则两个区间中，必有一个左端点函数值正，右端点函数值为负，设这

区间为 $[a_2,b_2]$，则 $[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]$ 且 $f(a_2)>0$，$f(b_2)<0$，……

二等分 $[a_n, b_n] = [a_n, \frac{a_n+b_n}{2}] \cup [\frac{a_n+b_n}{2}, b_n]$，则必有一个子区间[满足

左端点函数值为正、右端点函数值为负，记此区间为 $[a_{n+1}, b_{n+1}]$，

则 $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$，$n=1,2,3,\cdots$ 且 $f(a_n)>0$，$f(b_n)<0$，

$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}} \to 0\ (n\to\infty)$. 由闭区间套定理知，$\exists! \alpha_0 \in [a_n, b_n]$
$n=1,2,3,\cdots$

使 $a_n \to \alpha_0$，$b_n \to \alpha_0\ (n\to\infty)$，所以 $f(a_n)>0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \geq 0$

$\Rightarrow f(\lim\limits_{n\to\infty} a_n) = f(\alpha_0) \geq 0$ 且 $\because f(b_n)<0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) \leq 0 \Rightarrow$

$f(\lim\limits_{n\to\infty} b_n) = f(\alpha_0) \leq 0$，故 $f(\alpha_0)=0$，$\alpha_0 \in (a,b)$.

性质(II)（介值性）若存在常数 h，使 $f(a)<h<f(b)$ 或

$f(a)>h>f(b)$，则必有 $x_0 \in (a,b)$ 使 $f(x_0)=h$.

证：令 $g(x) = f(x) - h$，$x\in[a,b]$，且 $f(a)<h<f(b)$，则 $g(x) \in C[a,b]$

且 $g(a) = f(a) - h < 0$，$g(b) = f(b) - h > 0$. 由性质(I)有 $x_0 \in (a,b)$

使 $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - h = 0 \Rightarrow f(x_0) = h$.

性质(III)（有界性），即 $\exists M>0$，使 $|f(x)| \leq M$，$\forall x\in[a,b]$.

反证法：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界 $\Rightarrow$ 对 $\forall n \in N^*$，$\exists x_n \in [a,b]$ 使

$|f(x_n)| \geq n$，$n=1,2,3,\cdots$ 而数列 $\{x_n\} \subset [a,b]$，

即$\{x_n\}$是无穷多个极为的有界数列，依列紧性定理知

$\{x_n\}$有收敛的子列$\{x_{n_k}\}$，设$x_{n_k}\to x_0\ (k\to\infty)$，且$x_0\in[a,b]$。

一方面 $|f(x_{n_k})|\geq n_k\to\infty\ (k\to\infty)$ 即$|f(x_0)|=\infty$

另一方面$x_0\in[a,b]$且$f(x)$在$[a,b]$上C，知$f(x_0)$是有限值，矛盾！

故$f(x)$在$[a,b]$上有界。

(II)（最值性）必$\exists x_1,x_2\in[a,b]$，使$f(x_1)\leq f(x)\leq f(x_2)$，$\forall x\in[a,b]$。

即$f(x_1)$，$f(x_2)$分别是$f(x)$在$[a,b]$中的最小值与最大值。

证：由(I)知，$f(x)$在$[a,b]$上有界：$\exists M>0$，使$-M\leq f(x)\leq M$，$\forall x\in[a,b]$。

依确界原理：$f(x)$在$[a,b]$上既有上确界$\sup f(x)\triangleq\beta$，又有

下确界$\inf f(x)\triangleq\alpha$，下证：必有一点$x_2\in[a,b]$使$f(x_2)=\beta$。

用反证法：若对$\forall x\in[a,b]$，都有$f(x)<\beta$，令$g(x)=\dfrac{1}{\beta-f(x)}$，$x\in[a,b]$

则$g(x)\in C[a,b]$ 依(I)，$g(x)$在$[a,b]$上有界：$\exists A>0$，使

$$-A<g(x)<A\Rightarrow\frac{1}{\beta-f(x)}<A\Leftrightarrow\beta-f(x)<\frac{1}{A}\Rightarrow f(x)<\beta-\frac{1}{A},\ \forall x\in[a,b]$$

与β是f在$[a,b]$上的最小上界矛盾，$\therefore$必$\exists x_2\in[a,b]$，使

$f(x_2)=\beta$，同理必存在$x_1\in[a,b]$，使$f(x_1)=\alpha$。 (証).

(V) (一致C性). 若$f(x)$在$[a,b]$上C，则$f(x)$在$[a,b]$上为一致C。

用反证法：若$f(x)$在$[a,b]$上非一致C：则$\exists \varepsilon_0>0$，对$\forall \delta>0$，当$x_1,x_2\in[a,b]$

且$|x_1-x_2|<\delta$时，$|f(x_1)-f(x_2)|\geq\varepsilon_0$. 取$\delta_n=\frac{1}{n}$，$n=1,2,3,\cdots$ 则$\delta_n>0$.

且$\exists x_{1n},x_{2n}\in[a,b]$，使$|x_{1n}-x_{2n}|<\delta_n=\frac{1}{n}$，但$|f(x_{1n})-f(x_{2n})|\geq\varepsilon_0$.

由$\{x_{1n}\},\{x_{2n}\}$有界且由收敛子列定理知$\{x_{1n}\}$有收敛子列

$\{x_{1n_k}\}$ 设$x_{1n_k}\longrightarrow\alpha_0\ (k\to\infty)$，$\{x_{2n}\}$有收敛子列$\{x_{2n_k}\}$，设

$x_{2n_k}\to\beta_0\ (k\to\infty)$ 则有 $|x_{1n_k}-x_{2n_k}|<\frac{1}{n_k}$，$|f(x_{1n_k})-f(x_{2n_k})|\geq\varepsilon_0$

利用 $0\leq|x_{1n_k}-x_{2n_k}|<\frac{1}{n_k}\longrightarrow 0\ (k\to\infty)\Rightarrow\lim\limits_{k\to\infty}|x_{1n_k}-x_{2n_k}|=0$

即$|\alpha_0-\beta_0|=0\Rightarrow\beta_0=\alpha_0\Rightarrow\lim\limits_{k\to\infty}|f(x_{1n_k})-f(x_{2n_k})|\geq\varepsilon_0\Rightarrow$

$|f(\alpha_0)-f(\beta_0)|=0\geq\varepsilon_0>0$，矛盾！故$f(x)$在$[a,b]$上一致C。

三)例题. 例1. 证明方程：$x^7+e^x=3$在$(0,1)$中存在唯一实根。

例2 (eX2.2/4. 设$f\in C[a,b]$且$f([a,b])=[a,b]$ 则$\exists x_0\in[a,b]$使$f(x_0)=x_0$.

四)作业：eX2.2：1;2;3;5;6;7;8;9. ch2练/6.