先给出对于可积函数的一些直观想象.

在闭区间上有界的函数, 如果只有有限个不连续点, 这个函数是可积的. 事实上可数个间断点, 即间断点能写成一列 $\{x_n\}$, 那么这个函数是可积的. 可以证明, 改变这些点, 或者说改变任意有限个点, 函数的积分值不变. 这条性质是 Lesbegue 定理的直观解释.

因此, 可积函数有三个直观理解上的性质, 可以用来辅助理解.

(1) 由黎曼可积的定义, 再怎么加细分割成长条, 面积和不会无穷大.

(2) 由 Darboux 上和的理论, 可积函数的振幅不会很大.

(3) 由 Lesbegue 定理, 可积函数几乎处处连续.

第 1 节　分区间

定理 1.1. 积分第一中值定理

设 $f,g \in C[a,b], m \le f(x) \le M, g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

作业之中已经证明过此处 $\xi \in [a,b]$, 可以加强为 $\xi \in (a,b)$

定理 1.2. 积分第二中值定理

设 $f,g \in C[a,b], g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx$$

如果 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增, 且 $g(x) \ge 0$, 则 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\int_\xi^b f(x)dx$$

如果 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减, 且 $g(x) \ge 0$, 则 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx$$

事实上这里的 $\xi \in [a,b]$ 也可以加强为 $\xi \in (a,b)$

这里同学或许会有点困惑, 既然 ξ 范围都可以加强, 那为什么不直接给出加强后命题的证明呢, 反正他的适用性也更强. 这是因为如果把条件中的 $f,g \in$

$C[a,b]$ 减弱为 $f,g\in R[a,b]$, 那么这个定理就只能给出 $\xi\in[a,b]$.

对函数的定积分是一个数, 更准确的描述是, 与积分变量无关的数. 如果被积函数带有参数, 那么就会得到一个以参数做自变量的数列或者函数, 如

$$a_n=\int_0^1 x^n(1-x)^n dx,\quad f(x)=\int_a^b e^{x\sin t}dt$$

我们要利用积分中值定理来研究这些数列和函数的极限, 常见的一个手段是**分区间**. 找到一个极小的区间, 这部分的积分值占据了函数的绝大部分.

例 1.3. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^n x dx=0$.

请指出一下做法的不严谨之处.

证明. 由积分第一中值定理, 存在 $\xi\in(0,\pi/2)$, 使得

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n x dx=\sin^n\xi\int_0^{\pi/2}dx=\sin^n\xi\frac{\pi}{2}$$

由 $\sin\xi\le 1$, 令 $n\to\infty$, 得证. □

错误在于 ξ 不是常数, 而是随着 n 的变化而变化的, 应该记为 ξ_n. 当 $n\to\infty$ 时, 不难证明有 $\xi_n\to\frac{\pi}{2}$, 因此 $\sin^n\xi_n$ 是 1^∞ 型的不定式. 回忆数列极限的内容, 我们知道, 从一个数列 $\{a_n\}$ 的每一项满足 $0<a_n<1$ 是得不出 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^n=0$ 的.

正确的做法应当如下所示.

证明. 对于给定的 $\varepsilon\in(0,\pi)$,

$$\begin{aligned}0\leqslant\int_0^{\pi/2}\sin^n x dx&=\int_0^{(\pi-\varepsilon)/2}\sin^n x dx+\int_{(\pi-\varepsilon)/2}^{\pi/2}\sin^n x dx\\&\leqslant\frac{\pi}{2}\sin^n\frac{\pi-\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\to\frac{\varepsilon}{2}\quad(n\to\infty)\end{aligned}$$

由 ε 的任意性, 得证. □

注意其中的 ε 是与 n 无关的常数, 所以可以在保留 ε 的情况下, 令 $n\to\infty$.

更详细的解释是, 可以理解为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\sin^n\frac{\pi-\varepsilon}{2}dx=0$, 因此对于 (并不是任意的, 而就是这题开头) 给定的 ε, 存在 N, 使得 $n>N$ 时, 有 $|\frac{\pi}{2}sin^n\frac{\pi-\varepsilon}{2}|<\varepsilon$, 然后再由 ε 的任意性得证.

例 1.4. 设 $f(x)\in C[0,1]$, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}n\int_0^1 x^n f(x)\,dx=f(1)$.

证明. $\forall\varepsilon>0$, 由 $\lim x\to 1^- f(x)=f(1)$, 存在 $\delta>0$, 当 $1-x<\delta$ 时, 有 $|f(x)-f(1)|<\varepsilon$. 又由 $f(x)\in C[0,1]$, 故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界, 设 $|f(x)|\le M$.

$$\begin{aligned}\left|n\int_0^1 x^n(f(x)-f(1))\,dx\right| &\le n\int_0^1 x^n|f(x)-f(1)|\,dx\\ &=n\int_0^{1-\delta}x^n|f(x)-f(1)|\,dx+n\int_{1-\delta}^1 x^n|f(x)-f(1)|\,dx\\ &\le 2Mn\frac{(1-\delta)^{n+1}}{n+1}+\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{n}{n+1}\le 2M(1-\delta)^{n+1}+\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

此处 ε, M 的选取与 n 无关, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}2M(1-\delta)^{n+1}=0$, 故 $\exists N,\forall n>N$, 有 $2M(1-\delta)^{n+1}<\frac{\varepsilon}{2}$, 从而 $\left|n\int_0^1 x^n(f(x)-f(1))\,dx\right|<2M(1-\delta)^{n+1}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$. □

例 1.5. 设 $f(x)\in D[0,1]$, 求证:$I=\lim\limits_{n\to\infty}n\left[n\int_0^1 x^n f(x)\,dx-f(1)\right]=-f(1)-f'(1)$.

证明. 设 $I_1=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\int_0^1 x^n(f(x)-f(1))\,dx$, $I_2=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}f(1)$, 有 $I=I_1-I_2$.

$\forall\varepsilon>0$, 由 $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$, 存在 $\delta>0$, 当 $1-\delta<x<1$ 时, 有 $\left|\frac{f(x)-f(1)}{x-1}-f'(1)\right|<\varepsilon$, 即 $\begin{cases}f(x)-f(1)<(x-1)(f'(1)+\varepsilon)\\ f(x)-f(1)>(x-1)(f'(1)-\varepsilon)\end{cases}$

记 $I_3=n^2\int_0^{1-\delta}x^n(f(x)-f(1))\,dx$, $I_4=n^2\int_{1-\delta}^1 x^n(f(x)-f(1))\,dx$, 有

$$|I_3|\le 2Mn^2\int_0^{1-\delta}x^n\,dx=2Mn^2\frac{(1-\delta)^{n+1}}{n+1}\le 2Mn(1-\delta)^{n+1}\to 0\,(n\to\infty)$$

$$|I_4+f'(1)|\le n^2\int_{1-\delta}^1 x^n\varepsilon(1-x)\,dx\to\varepsilon\,(n\to\infty)$$

故存在 $N,\forall n>N$, 有 $|I_3|<\varepsilon, |I_4+f'(1)|<2\varepsilon$, 从而 $|I_1-f'(1)|<3\varepsilon$, 即证 $I_1=-f'(1)$. 又 $I_2=-f(1)$, 故 $I=I_1-I_2=-f'(1)-f(1)$. □

练习. 设 $f(x)\in C[0,1], f(x)\leqslant 1$ 且 $f(x)=1$ 当且仅当 $x=x_0$, 设 $0<a\leqslant x_0\leqslant b<1, a\ne b$, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\int_a^b f^n(x)dx}{\int_0^1 f^n(x)dx}=1$.

第 2 节 微分方程

2.1 微分方程的解是一族函数

微分方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$ 求解的结果通常形如 $y=y(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$, 其中 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 是待定常数. 这里的常数个数与微分方程的阶数有关.

有的同学在理解时, 会认为求解微分方程和解方程一样, 是固定了 x 后, 解出 y 的值, 这也是被 abuse of notation 误导了. 上面的 $y=y(x,C)$ 如果写成 $y=f(x,C)$, 那应该更好理解微分方程的解是一族函数, 而不是一个具体的数.

注记 2.1. *此处称 $y=f(x,C)$ 为一族函数的原因是, 对于不同的 C, 得到的函数是不同的. 可以这么说, 如果看 C 与 x 的关系, 发现 C 是与 x 无关的数, 所以可以称为常数. 如果看 C 与 $y=f(x,C)$ 中 y 的关系, 每一个 C 决定了一个 $f(x,C)$, 从而 C 可以称作这一函数族的参数.*

2.2 解微分方程的除 x 的合理性

例 2.2. *$xdx+ydy=0$ 与 $\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{y}{x}$ 是同一个微分方程吗?*

上面的例题的结果促使我们将一阶微分方程写成将 x,y 视为等价的形式, 即

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

当 $Q(x_0,y_0)\neq 0$ 时, 在 (x_0,y_0) 点附近, 方程等价于 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$,
当 $P(x_0,y_0)\neq 0$ 时, 在 (x_0,y_0) 点附近, 方程等价于 $\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{Q(x,y)}{P(x,y)}$.
不加证明的给出以下定理

定理 2.3. *《常微分方程》柳彬 P106 推论 3.1 不要求掌握*

设函数 $f(x,y)=-\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ 在区域 G 上连续, 且满足局部 Lipschitz 条件, 则对于任意一点 $P_0(x_0,y_0)\in G$, 存在唯一的解 $y=\varphi(x)$, 经过 P_0, 且这个解作为 G 中的曲线可以延伸至边界.

注记. *局部 Lipschitz 条件是指, 存在一个邻域 $U(P_0)$, 存在常数 L, 使得对于任意的 $(x,y_1),(x,y_2)\in U(P_0)$, 有 $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant L|y_1-y_2|$.*

这个定理说明了只要我 $P(x,y)$,$Q(x,y)$ 的性质优良 (在 B1 中可以不加验证的认为足够优良), 那么方程 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ 的解是存在唯一的, 而且这个解用连续性补上边界的缺失之后, 就是 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 的解.

例 2.4. 求 $(x^2+3y^2)dx-2xydy=0$ 的解.

解. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2+3y^2}{2xy}$, 令 $u=\dfrac{y}{x}$, 则 $x\dfrac{du}{dx}+u=\dfrac{1+3u^2}{2u}$, 解得 $\ln(1+u^2)=\ln|x|+C_0$, 两边取指数, 并记 $C_1=e^{C_0}$, 有 $1+u^2=C_1x$, 即 $1+\dfrac{y^2}{x^2}=C_1x$, 即 $x^2+y^2=C_1x^3$. □

后者的解去除了 $x=0$ 或 $y=0$ 的情况, 也就是说, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2+3y^2}{2xy}$ 的解是 $g(x,y,C)=0, xy\neq 0$ 的图像, 其中 $g(x,y,C)=x^2+y^2-Cx^3$. 而上面的定理不仅保证了这个解存在唯一, 而且可以补上图像所缺的点. 也就是说 $(x^2+3y^2)dx-2xydy=0$ 的解是 $g(x,y,C)=0$ 的图像.

B1 的作业和考试之中, 两边除 $Q(x,y)$, 把方程变为 $y'=\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$ 的形式, 这一操作是合理的. 而且也不用去分类讨论最终的图像有没有去除一些特殊点, 直接认为求解所得的图像就是答案就好.

由此还发现了一个规律, 如果方程的形式写为 $y'=f(x,y)$, 那么解的形式可以写为 $y=F(x,C)$. 如果方程的形式写为 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$, 其中 x,y 看起来地位相同, 那么微分方程解的形式通常是隐函数 $G(x,y,C)=0$, 这是一条经验.

2.3 微分方程解中的常数

例 2.5. 指出下列微分方程解法中的不妥之处.

已知 $y''\sin^2 x=2y$ 有一个特解 $y_1=\cot x$, 求通解.

$y_2(x)=\cot x\displaystyle\int tan^2xe^{-\int 0}dx=C_1\cot x(\int\sec^2 dx-\int 1dx)=C_1\cot x(\tan x+C_3)-C_1\cot x(x+C_4)=(C_5x+C_6)\cot x+C_7+C_8x$.

其中解不定方程时, 用拆成两个不定积分, 后面一步中增加了变元的数量, 实际上 C_3,C_4 可以只保留一个, 而且整体的答案没必要拆的这么细, C 保留在括号里也是可以的.

例 2.6. 例 *2.4* 中, 有 $\ln(1+u^2)=ln|x|+C_0$ 后取指数时, 为什么直接就把绝对值去掉了?

我习惯于这么去想, 先利用平方通通换为隐式方程 $\left(1+\dfrac{y^2}{x^2}\right)^2=Cx^4$, 解得 $(y^2+x^2)^2=C'x^6, C'\geqslant 0$. 这时候画一下图像会发现, 这个函数图像有两支, 一支在 $x>0$ 的半个平面, 另一支在 $x<0$ 的半个平面. 他们分别是 $x^2+y^2=Cx^3, x>0$ 和 $x^2+y^2=-Cx^3, x<0$.

我给定 $(x_0, y_0), x_0 > 0$ 将微分方程看成一个初值问题, 就发现解只能在 $x > 0$ 的半个平面. 因此可以取 $x^2 + y^2 = C_1x^3, C_1 > 0$, 如果给定 $(x_0, y_0), x_0 < 0$, 那么解只能在 $x < 0$ 的半个平面, 因此可以取 $x^2 + y^2 = C_2x^3, C_2 > 0$. 合起来就是 $x^2 + y^2 = Cx^3$.

微分方程的解不能写成 $(x^2 + y^2)^2 = Cx^6$, 因为在固定初值时, 解只能在某一支上. 大部分有绝对值的题目要去掉绝对值的理由都是这个.

考试的时候对解进行开平方求某一支的时候, 不用写这么详细, 但是建议拿图像判断一下, 写成过程就是分类讨论.

第 3 节 积分不等式

这部分常见于考试的压轴, 所以常见的方法是有必要掌握的.

3.1 命题方式

对 $\int_0^1 (a + bx^2 - f(x))^2 dx \geqslant 0$, 展开得到

$$\int_0^1 (a^2 + b^2x^4 + f^2(x) - 2af(x) - 2bx^2f(x)) + 2abx^2 dx \geqslant 0$$

记 $A = \int_0^1 f^2(x)dx$, $B = \int_0^1 x^2f(x)dx$, $C = \int_0^1 x^2f(x)dx$, 则有

$$a^2 + \frac{2}{3}ab + \frac{1}{5}b^2 + A - 2bB - 2aC \geqslant 0$$

$$A \geqslant 2bB + 2aC - a^2 - \frac{2}{3}ab - \frac{1}{5}b^2 := g(a, b)$$

$g(a, b)$ 是一个关于 a, b 的二次函数, 这里涉及了一些多元微积分的知识, 我们不加证明的认为, 当 $g(a, b)$ 取得最大值时,$g(a, b)$ 对 a, b 的偏导数为 0. 即

$$2C - 2a - \frac{2}{3}b = 0, 2B - \frac{2}{5}b - \frac{2}{3}a = 0$$

解得的 a, b 带回原不等式, 得到形如 $C \geqslant \lambda_1A^2 + \lambda_2AB + \lambda_3B^2$ 的不等式. 最后得出某个形如 $\int_0^1 f^2(x)dx \geqslant \lambda \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 x^2f(x)dx$ 的不等式.

把这个形式作为题目丢给你. 然而你做题的时候不是这么分析的, 你大概顺着用 Cauchy-Schwarz 不等式的方法, 写出 $\int_0^1 f^2(x)dx \int_0^1 (ax^2 + b)^2dx \geqslant$

$\left(\int_0^1 f(x)(ax^2+b)dx\right)^2$.

这种题一是难在那个核心的 $\int (F(a,b,x))^2 dx \geqslant 0$ 是如何有关于 $f(x)$ 的, 二这种题还会与微分中值, 泰勒展开, 其他不等式等等结合起来. 这里我列出尽可能多的积分不等式的证明技巧,

3.2 拼凑法

拼凑法的常见思路大致有如下几种

- 拼凑转化为判别式 $\Delta = b^2 - 4ac \leqslant 0$.
- 如果 $m \leqslant f(x) \leqslant M$, 拼凑 $(f(x)-m)(M-f(x)) > 0$
- 拼凑 Cauchy-Schwarz 不等式

例 3.1. *Cauchy-Schwarz*

设 $f(x), g(x) \in C[a,b]$, 证明:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$$

证明. $\int_a^b (f(x)-\lambda g(x))^2 dx \geqslant 0$, 展开得到

$$\int_a^b f^2(x)dx - 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)dx + \lambda^2 \int_a^b g^2(x)dx \geqslant 0$$

利用 $\Delta = b^2 - 4ac \leqslant 0$. 即证. □

例 3.2. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续且单增, 证明:

$$\int_a^b xf(x)dx \leqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$$

.

证明. $\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(f(x)-f(\frac{a+b}{2})\right) \geqslant 0$, 两侧对 x 在 $[a,b]$ 上积分, 有

$$\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(f(x)-f(\frac{a+b}{2})\right)dx \geqslant 0$$

展开得到

$$\int_a^b xf(x)dx - \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)dx \geqslant 0$$

其中 $\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)dx = 0$. 即证. □

例 3.3. 求最小的 k 使得

$$\int_0^1 f^2(x)dx \leqslant k\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$$

对所有满足 $1 \leqslant f(x) \leqslant 2$ 的可积函数都成立.

解. 对 $(2-f(x))(f(x)-1) \leqslant 0$ 积分得

$$3\int_0^1 f(x)dx - 2 - \int_0^1 f^2(x)dx \geqslant 0$$

因此只需要保证

$$-k\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 + 3\int_0^1 f(x)dx - 2 \leqslant 0$$

满足上式的必要条件为

$$\Delta = 9 - 8k \leqslant 0 \Rightarrow k \geqslant \frac{9}{8}$$

. □

3.3 利用微分中值定理

例 3.4. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶连续导数,$f(0)=f(1)=0$, 证明:

$$\int_0^1 |f''(x)|dx \geqslant 4\max|f(x)|$$

证明. 存在 x_0 $s.t.$ $\max\limits_{[0,1]}|f(x)| = |f(x_0)| > 0$,

由 langrange 中值定理, 存在 $\xi_1 \in (0,x_0)$, 使得 $f'(\xi_1) = \dfrac{f(x_0)}{x_0}$, 存在 $\xi_2 \in (x_0,1)$, 使得 $f'(\xi_2) = -\dfrac{f(x_0)}{1-x_0}$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f''(x)|dx &\geqslant \int_{\xi_1}^{\xi_2} |f''(x)|dx \geqslant \left|\int_{\xi_1}^{\xi_2} f''(x)dx\right| \\ &= |f'(\xi_2)-f'(\xi_1)| = \left|\frac{f(x_0)}{1-x_0}-\frac{f(x_0)}{x_0}\right| \\ &= \frac{2}{x_0(1-x_0)}|f(x_0)| \geqslant 4|f(x_0)|\end{aligned}$$

例 3.5. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可微, 且 $f(0)=f(1)=0, |f'(x)|\leqslant M$, 证明: □

$$\int_0^1 |f(x)|dx \leqslant \frac{M}{4}$$

证明.
$$\int_0^1 |f(x)|dx = \int_0^{1/2} |f(x)|dx + \int_{1/2}^1 |f(x)|dx$$

由 Taylor 公式二阶展开,

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} |f(x)|dx &= \int_0^{1/2} |f(0)+f'(\xi)x|dx \\ &\leqslant M\int_0^{1/2} |x|dx = \frac{M}{8}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{1/2}^1 |f(x)|dx &= \int_{1/2}^1 |f(1)+f'(\xi)(x-1)|dx \\ &\leqslant M\int_{1/2}^1 |x-1|dx = \frac{M}{8}\end{aligned}$$

相加即证. □

例 3.6. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数, 且 $f(\frac{a+b}{2})=0$, 证明:

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|dx \leqslant \frac{b-a}{4}\int_a^b |f'(x)|^2dx$$

证明. 令 $F_1(x)=\left|\int_x^{\frac{a+b}{2}} f'(t)dt\right| = |f(x)|$, 有

$$F_1(x) \leqslant \int_x^{\frac{a+b}{2}} |f'(t)|dt \Rightarrow F_1'(x) \leqslant -|f'(x)|$$

因此有

$$\begin{aligned}
&\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)f'(x)| = \int_a^{\frac{a+b}{2}} F_1(x)|f'(x)|dx \leqslant \int_a^{\frac{a+b}{2}} F_1(x)F_1'(x)dx \\
=&-\frac{1}{2}F_1^2(x)\Big|_a^{\frac{a+b}{2}} = \frac{1}{2}\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(t)|dt\right)^2 \\
\leqslant&\frac{1}{2}\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(t)|^2dt \cdot \int_a^{\frac{a+b}{2}} dt = \frac{b-a}{4}\int_a^{\frac{a+b}{2}} |f'(t)|^2dt
\end{aligned}$$

同理有

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)f'(x)| = \int_{\frac{a+b}{2}}^b F_2(x)|f'(x)|dx \leqslant \int_{\frac{a+b}{2}}^b F_2(x)F_2'(x)dx \\
=&\frac{1}{2}\left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(t)|dt\right)^2 \\
\leqslant&\frac{1}{2}\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(t)|^2dt \cdot \int_{\frac{a+b}{2}}^b dt = \frac{b-a}{4}\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f'(t)|^2dt
\end{aligned}$$

相加即证. □

例 3.7. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微,$|f'(x)| \leqslant M, \int_a^b f(x)dx = 0$, 证明:

$$\left|\int_a^x f(t)dt\right| \leqslant \frac{M}{8}(b-a)^2$$

证明. 设 $|F(x_0)| = \max\limits_{[a,b]}|F(x)|$, 则 $F'(x_0) = f(x_0) = 0$.

不妨设 $a \leqslant x_0 \leqslant \frac{a+b}{2}$, 则有

$$\begin{aligned}
|F(x_0)| &= \left|\int_a^{x_0} f(x) - f(x_0)dx\right| \\
&= \left|\int_a^{x_0} f'(\xi)(x-x_0)dx\right| \leqslant M\int_a^{x_0}(x_0-x)dx = \frac{M}{8}(b-a)^2.
\end{aligned}$$

□

3.4 练习

练习 3.8. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减, 证明: 对任意的 $\alpha \in (0,1)$, 有

$$\int_0^\alpha f(x)dx \geqslant \alpha\int_0^1 f(x)dx$$

证明. $\int_0^\alpha f(x)dx \geqslant \int_0^\alpha f(\alpha)dx = \alpha f(\alpha)$

$\int_\alpha^1 f(x)dx \leqslant \int_\alpha^1 f(\alpha)dx = \frac{1-\alpha}{\alpha}\alpha f(\alpha) = \frac{1-\alpha}{\alpha}\int_0^\alpha f(x)dx.$

相加即证. □

练习 3.9. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可微, 证明:

$$\max_{[0,1]}|f(x)| \leqslant \int_0^1 |f'(x)|dx + \int_0^1 |f(x)|dx$$

证明. 设 $|f(x_0)| = \max\limits_{[0,1]}|f(x)|$, 则 $f(x) = \int_{x_0}^x f'(t)dt + f(x_0)$.

由 $f(x_0) = f(x) - \int_{x_0}^x f'(t)dt$, 两侧积分并取绝对值, 有

$|f(x_0)| = \left|\int_0^1 f(x_0)dt\right| = \left|\int_0^1 f(x)dt - \int_0^1\int_{x_0}^x f'(t)dtdx\right| \leqslant \int_0^1 |f(x)|dx + \left|\int_0^1 \left(\int_{x_0}^x f'(t)dt\right)dx\right|$

后者有 $\left|\int_0^1 \left(\int_{x_0}^x f'(t)dt\right)dx\right| \leqslant \int_0^1 \left|\int_{x_0}^x |f'(t)|dt\right|dx \leqslant \int_0^1\int_0^1 |f'(t)|dtdx = \int_0^1 |f'(t)|dt$, 即证. □

练习 3.10. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微, 证明:

$$\max_{[a,b]} f(x) \leqslant \int_a^b |f'(x)|dx + \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|dx$$

证明. 设 $f(x_0) = \max\limits_{[a,b]} f(x)$, 则 $f(x) = \int_{x_0}^x f'(t)dt + f(x_0)$.

由 $f(x_0) = f(x) - \int_{x_0}^x f'(t)dt \leqslant f(x) + \left|\int_{x_0}^x f'(x)dx\right| \leqslant f(x) + \int_a^b |f'(x)|dx$.
两侧在 $[a,b]$ 上积分即证. □

练习 3.11. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微,$f(a)=0$, 证明:

$$\int_a^b f^2(x)dx \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b f'^2(x)dx$$

证明. $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt = \int_a^x f'(t)dt$, 则 $f^2(x) = \left(\int_a^x f'(t)dt\right)^2$.

由 Cauchy 积分不等式,$f^2(x) = \left(\int_a^x f'(t)dt\right)^2 \leqslant \left(\int_a^x f'^2(t)dt\right)\left(\int_a^x dt\right) = (x-a)\int_a^x f'^2(t)dt \leqslant (x-a)\int_a^b f'^2(t)dt$.

两侧在 $[a,b]$ 上积分即证. □

练习 3.12. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,$0\leqslant f(x)\leqslant 1$, 证明:

$$2\int_0^1 xf(x)dx\geqslant\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$$

证明. 设 $g(x)=2\int_0^x tf(t)dt-\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2$, 则 $g(0)=0$.

$g'(x)=2xf(x)-2\int_0^x f(t)dtf(x)=2f(x)\left(x-\int_0^x f(t)dt\right)$.

$h(x)=x-\int_0^x f(t)dt$, 有 $h(0)=0$, 且 $h'(x)=1-f(x)\geqslant 0$, 即 $h(x)$ 单调递增,$h(x)\geqslant 0$.

故 $g'(x)\geqslant 0$, 即 $g(x)$ 单调递增,$g(x)\geqslant 0$. □

练习 3.13. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微, 且 $f(0)=0, f'(x)\geqslant 0$, 对于 $0<\alpha<\beta<1$, 求证:

$$\int_0^1 f(x)dx\geqslant\frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

证明. 设 $g(x)=\dfrac{\int_\alpha^x f(x)dx}{x-\alpha}$,$g'(x)=\dfrac{f(x)(x-\alpha)-\int_\alpha^x f(t)dt}{(x-\alpha)^2}$.

$h(x)=f(x)(x-\alpha)-\int_\alpha^x f(t)dt$, 有 $h(\alpha)=0$, 且 $h'(x)=f(x)+(x-\alpha)f'(x)-f(x)=(x-\alpha)f'(x)\geqslant 0$, 即 $h(x)$ 单调递增,$h(x)\geqslant 0$.

故 $g'(x)\geqslant 0$, 即 $g(x)$ 单调递增,$g(x)\geqslant g(\beta)=\dfrac{\int_\alpha^\beta f(x)dx}{\beta-\alpha}$. □

练习 3.14. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可微,$f(0)+f(1)=0$, 证明:

$$\left|\int_0^1 f(x)dx\right|\leqslant\frac{1}{2}\int_0^1|f'(x)|dx$$

证明. $f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)dt,\ f(x)=f(1)-\int_x^1 f'(t)dt$,

两式相加并积分, 有

$$\begin{aligned}2\left|\int_0^1 f(x)dx\right|&=\left|\int_0^1\left(\int_0^x f'(t)dt-\int_x^1 f'(t)dt\right)dx\right|\\&\leqslant\int_0^1\left|\int_0^x f'(t)dt\right|+\left|\int_x^1 f'(t)dt\right|dx\\&\leqslant\int_0^1\int_0^x|f'(t)|dt+\int_0^1\int_x^1|f'(t)|dtdx=\int_0^1|f'(t)|dt.\end{aligned}$$

□

练习 3.15. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续可微, 且对任意的 $x,y \geqslant 0$, 有 $|f'(x)-f'(y)| \leqslant |x-y|$, 证明:

$$(f'(x))^2 \leqslant 2f(x)$$

证明. $f(x+y)=f(x)+\int_x^{x+y} f'(t)dt$

$$\begin{aligned} f(x+y) &\leqslant f(x)+yf'(x)+\int_x^{x+y}|f'(t)-f'(x)|dt \\ &\leqslant f(x)+yf'(x)+\int_x^{x+y}|t-x|dt \\ &= f(x)+yf'(x)+\frac{1}{2}(t-x)^2|_x^{x+y} \\ &= f(x)+yf'(x)+\frac{1}{2}y^2 \end{aligned}$$

取 $y=-f'(x)$ 即证 $f'(x)\leqslant 0$ 的情况,

$f'(x)\geqslant 0$ 的情况对 $f(x-y)$ 展开即证.

□

练习 3.16. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶连续可导, 证明:

$$\max_{[0,1]}|f'(x)| \leqslant |f(1)-f(0)|+\max_{[0,1]}|f''(x)|$$

证明. 设 $|f'(x_0)|=\max_{[0,1]}|f'(x)|$. 由微分中值, 存在 $\xi\in(0,1), f'(\xi)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=f(1)-f(0)$.

$\int_0^1|f''(x)|dx \geqslant \left|\int_{x_0}^{u}|f''(x)|dx\right| \geqslant |f'(u)-f'(x_0)|$.

从而 $|f(1)-f(0)|+\int_0^1|f''(x)|dx \geqslant |f'(u)|+|f'(x_0)-f'(u)| \geqslant |f'(x_0)|$. □

上面的这些例题所用工具整理如下:

1. Cauchy-Schwarz 不等式
2. Langrange 中值定理
3. $f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)dt$
4. 由 $f(x)\leqslant g(x)$ 对两边进行积分
5. $\int_a^b|f(x)|dx \geqslant \left|\int_a^b f(x)dx\right|$