先给出对于可积函数的一些直观想象.

在闭区间上有界的函数, 如果只有有限个不连续点, 这个函数是可积的. 事实上可数个间断点, 即间断点能写成一列 $\{x_n\}$, 那么这个函数是可积的. 可以证明, 改变这些点, 或者说改变任意有限个点, 函数的积分值不变. 这条性质是 Lesbegue 定理的直观解释.

第 1 节　分区间

定理 1.1. 积分第一中值定理

设 $f, g \in C[a,b], m \leq f(x) \leq M, g(x)$ 在 $[a,b]$ 上不变号, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

作业之中已经证明过此处 $\xi \in [a,b]$, 可以加强为 $\xi \in (a,b)$

定理 1.2. 积分第二中值定理

设 $f, g \in C[a,b], g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx$$

如果 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增, 且 $g(x) \geq 0$, 则 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\int_\xi^b f(x)dx$$

如果 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减, 且 $g(x) \geq 0$, 则 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx$$

事实上这里的 $\xi \in [a,b]$ 也可以加强为 $\xi \in (a,b)$

这里同学或许会有点困惑, 既然 ξ 范围都可以加强, 那为什么不直接给出加强后命题的证明呢, 反正他的适用性也更强. 这是因为如果把条件中的 $f, g \in C[a,b]$ 减弱为 $f, g \in R[a,b]$, 那么这个定理就只能给出 $\xi \in [a,b]$.

对函数的定积分是一个数, 更准确的描述是, 与积分变量无关的数. 如果被积函数带有参数, 那么就会得到一个以参数做自变量的数列或者函数, 如

$$a_n = \int_0^1 x^n(1-x)^n dx, \quad f(x) = \int_a^b e^{x\sin t}dt$$

我们要利用积分中值定理来研究这些数列和函数的极限, 常见的一个手段是**分区间**. 找到一个极小的区间, 这部分的积分值占据了函数的绝大部分.

例 1.3. *证明:* $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^n x dx = 0.$

请指出一下做法的不严谨之处.

证明. 由积分第一中值定理, 存在 $\xi \in (0, \pi/2)$, 使得

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n x dx = \sin^n \xi \int_0^{\pi/2} dx = \sin^n \xi \frac{\pi}{2}$$

由 $\sin \xi \leq 1$, 令 $n \to \infty$, 得证. □

例 1.4. *设* $f(x) \in C[0,1]$, *求证:* $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 x^n f(x)\, dx = f(1).$

证明. $\forall \varepsilon > 0$, 由 $\lim x \to 1^- f(x) = f(1)$, 存在 $\delta > 0$, 当 $1 - x < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(1)| < \varepsilon$. 又由 $f(x) \in C[0,1]$, 故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界, 设 $|f(x)| \leq M$.

$$\begin{aligned}\left|n\int_0^1 x^n(f(x)-f(1))\, dx\right| &\leq n\int_0^1 x^n|f(x)-f(1)|\, dx \\ =&n\int_0^{1-\delta} x^n|f(x)-f(1)|\, dx + n\int_{1-\delta}^1 x^n|f(x)-f(1)|\, dx \\ \leq& 2Mn\frac{(1-\delta)^{n+1}}{n+1} + \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{n}{n+1} \leq 2M(1-\delta)^{n+1} + \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

此处 ε, M 的选取与 n 无关, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} 2M(1-\delta)^{n+1} = 0$, 故 $\exists N, \forall n > N$, 有 $2M(1-\delta)^{n+1} < \dfrac{\varepsilon}{2}$, 从而 $\left|n\int_0^1 x^n(f(x)-f(1))\, dx\right| < 2M(1-\delta)^{n+1} + \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. □

例 1.5. *设* $f(x) \in D[0,1]$, *求证:* $I = \lim\limits_{n\to\infty} n\left[n\int_0^1 x^n f(x)\, dx - f(1)\right] = -f(1) - f'(1).$

证明. 设 $I_1 = \lim\limits_{n\to\infty} n^2\int_0^1 x^n(f(x)-f(1))\, dx$, $I_2 = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}f(1)$, 有 $I = I_1 - I_2$.

$\forall \varepsilon > 0$, 由 $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$, 存在 $\delta > 0$, 当 $1-\delta < x < 1$ 时, 有 $\left|\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} - f'(1)\right| < \varepsilon$, 即 $\begin{cases} f(x)-f(1) < (x-1)(f'(1)+\varepsilon) \\ f(x)-f(1) > (x-1)(f'(1)-\varepsilon)\end{cases}$

记 $I_3 = n^2\int_0^{1-\delta} x^n(f(x)-f(1))\,dx$, $I_4 = n^2\int_{1-\delta}^1 x^n(f(x)-f(1))\,dx$, 有

$$|I_3| \le 2Mn^2\int_0^{1-\delta} x^n\,dx = 2Mn^2\frac{(1-\delta)^{n+1}}{n+1} \le 2Mn(1-\delta)^{n+1} \to 0\,(n\to\infty)$$

$$|I_4+f'(1)| \le n^2\int_{1-\delta}^1 x^n\varepsilon(1-x)\,dx \to \varepsilon\,(n\to\infty)$$

故存在 $N, \forall n > N$, 有 $|I_3| < \varepsilon, |I_4+f'(1)| < 2\varepsilon$, 从而 $|I_1 - f'(1)| < 3\varepsilon$, 即证 $I_1 = -f'(1)$. 又 $I_2 = -f(1)$, 故 $I = I_1 - I_2 = -f'(1) - f(1)$. □

练习 1.6. 设 $f(x) \in C[0,1]$,$f(x) \leqslant 1$ 且 $f(x) = 1$ 当且仅当 $x = x_0$, 设 $0 < a \leqslant x_0 \leqslant b < 1, a \neq b$, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\int_a^b f^n(x)dx}{\int_0^1 f^n(x)dx} = 1$.

练习 1.7. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续非负, 且 $f(x)$ 不恒为 0,$g(x)$ 恒正, 记 $I_n = \int_a^b f^n(x)g(x)dx$, 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{I_{n+1}}{I_n}$ 存在, 且极限为 $\max\limits_{[a,b]} f(x)$.

第 2 节 微分方程

2.1 微分方程的解是一族函数

微分方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)}) = 0$ 求解的结果通常形如 $y = y(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$, 其中 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是待定常数. 这里的常数个数与微分方程的阶数有关.

有的同学在理解时, 会认为求解微分方程和解方程一样, 是固定了 x 后, 解出 y 的值, 这也是被 abuse of notation 误导了. 上面的 $y = y(x, C)$ 如果写成 $y = f(x, C)$, 那应该更好理解微分方程的解是一族函数, 而不是一个具体的数.

注记 2.1. 此处称 $y = f(x,C)$ 为一族函数的原因是, 对于不同的 C, 得到的函数是不同的. 可以这么说, 如果看 C 与 x 的关系, 发现 C 是与 x 无关的数, 所以可以称为常数. 如果看 C 与 $y = f(x,C)$ 中 y 的关系, 每一个 C 决定了一个 $f(x,C)$, 从而 C 可以称作这一函数族的参数.

2.2 解微分方程的除 x 的合理性

例 2.2. $xdx + ydy = 0$ 与 $\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{y}{x}$ 是同一个微分方程吗?

上面的例题的结果促使我们将一阶微分方程写成将 x,y 视为等价的形式, 即

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

当 $Q(x_0,y_0)\neq 0$ 时, 在 (x_0,y_0) 点附近, 方程等价于 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$,

当 $P(x_0,y_0)\neq 0$ 时, 在 (x_0,y_0) 点附近, 方程等价于 $\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{Q(x,y)}{P(x,y)}$.

不加证明的给出以下定理

定理 2.3. *《常微分方程》柳彬 P106 推论 3.1 不要求掌握*

设函数 $f(x,y)=-\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ 在区域 G 上连续, 且满足局部 Lipschitz 条件, 则对于任意一点 $P_0(x_0,y_0)\in G$, 存在唯一的解 $y=\varphi(x)$, 经过 P_0, 且这个解作为 G 中的曲线可以延伸至边界.

注记. *局部 Lipschitz 条件是指, 存在一个邻域 $U(P_0)$, 存在常数 L, 使得对于任意的 $(x,y_1),(x,y_2)\in U(P_0)$, 有 $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant L|y_1-y_2|$.*

这个定理说明了只要我 $P(x,y)$,$Q(x,y)$ 的性质优良 (在 B1 中可以不加验证的认为足够优良), 那么方程 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ 的解是存在唯一的, 而且这个解用连续性补上边界的缺失之后, 就是 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 的解.

例 2.4. *求 $(x^2+3y^2)dx-2xydy=0$ 的解.*

2.3 微分方程解中的常数

例 2.5. *指出下列微分方程解法中的不妥之处.*

已知 $y''\sin^2 x=2y$ 有一个特解 $y_1=\cot x$, 求通解.

$y_2(x)=\cot x\int tan^2xe^{-\int 0}dx=C_1\cot x(\int\sec^2 dx-\int 1dx)=C_1\cot x(\tan x+C_3)-C_1\cot x(x+C_4)=(C_5x+C_6)\cot x+C_7+C_8x$.

例 2.6. *例 2.4 中, 有 $\ln(1+u^2)=ln|x|+C_0$ 后取指数时, 为什么直接就把绝对值去掉了?*

第 3 节 积分不等式

这部分常见于考试的压轴, 常见的方法是有必要掌握的.

3.1 命题方式

对 $\int_0^1 (a+bx^2-f(x))^2dx \geqslant 0$, 展开得到

$$\int_0^1 (a^2+b^2x^4+f^2(x)-2af(x)-2bx^2f(x))+2abx^2dx \geqslant 0$$

记 $A=\int_0^1 f^2(x)dx$, $B=\int_0^1 x^2f(x)dx$, $C=\int_0^1 x^2f(x)dx$, 则有

$$a^2+\frac{2}{3}ab+\frac{1}{5}b^2+A-2bB-2aC \geqslant 0$$

$$A \geqslant 2bB+2aC-a^2-\frac{2}{3}ab-\frac{1}{5}b^2 := g(a,b)$$

$g(a,b)$ 是一个关于 a,b 的二次函数, 这里涉及了一些多元微积分的知识, 我们不加证明的认为, 当 $g(a,b)$ 取得最大值时,$g(a,b)$ 对 a,b 的偏导数为 0. 即

$$2C-2a-\frac{2}{3}b=0, 2B-\frac{2}{5}b-\frac{2}{3}a=0$$

解得的 a,b 带回原不等式, 得到形如 $C \geqslant \lambda_1 A^2+\lambda_2 AB+\lambda_3 B^2$ 的不等式. 最后得出某个形如 $\int_0^1 f^2(x)dx \geqslant \lambda \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 x^2f(x)dx$ 的不等式.

把这个形式作为题目丢给你. 然而你做题的时候不是这么分析的, 你大概顺着用 Cauchy-Schwarz 不等式的方法, 写出 $\int_0^1 f^2(x)dx \int_0^1 (ax^2+b)^2dx \geqslant \left(\int_0^1 f(x)(ax^2+b)dx\right)^2$.

这种题一是难在那个核心的 $\int (F(a,b,x))^2dx \geqslant 0$ 是如何有关于 $f(x)$ 的, 二这种题还会与微分中值, 泰勒展开, 其他不等式等等结合起来. 这里我列出尽可能多的积分不等式的证明技巧,

3.2 拼凑法

拼凑法的常见思路大致有如下几种

- 拼凑转化为判别式 $\Delta = b^2-4ac \leqslant 0$.
- 如果 $m \leqslant f(x) \leqslant M$, 拼凑 $(f(x)-m)(M-f(x)) > 0$
- 拼凑 Cauchy-Schwarz 不等式

例 3.1. *Cauchy-Schwarz*

设 $f(x), g(x) \in C[a,b]$, 证明:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$$

例 3.2. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续且单增, 证明:

$$\int_a^b xf(x)dx \leqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$$

.

例 3.3. 求最小的 k 使得

$$\int_0^1 f^2(x)dx \leqslant k\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$$

对所有满足 $1 \leqslant f(x) \leqslant 2$ 的可积函数都成立.

3.3 利用微分中值定理

例 3.4. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶连续导数,$f(0) = f(1) = 0$, 证明:

$$\int_0^1 |f''(x)|dx \geqslant 4\max|f(x)|$$

例 3.5. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可微, 且 $f(0) = f(1) = 0, |f'(x)| \leqslant M$, 证明:

$$\int_0^1 |f(x)|dx \leqslant \frac{M}{4}$$

例 3.6. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数, 且 $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, 证明:

$$\int_a^b |f(x)f'(x)|dx \leqslant \frac{b-a}{4}\int_a^b |f'(x)|^2dx$$

例 3.7. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微,$|f'(x)| \leqslant M, \int_a^b f(x)dx = 0$, 证明:

$$\left|\int_a^x f(t)dt\right| \leqslant \frac{M}{8}(b-a)^2$$

3.4 练习

练习 3.8. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减, 证明: 对任意的 $\alpha \in (0,1)$, 有

$$\int_0^\alpha f(x)dx \geqslant \alpha \int_0^1 f(x)dx$$

练习 3.9. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可微, 证明:

$$\max_{[0,1]} |f(x)| \leqslant \int_0^1 |f'(x)|dx + \int_0^1 |f(x)|dx$$

练习 3.10. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微, 证明:

$$\max_{[a,b]} f(x) \leqslant \int_a^b |f'(x)|dx + \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|dx$$

练习 3.11. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微,$f(a)=0$, 证明:

$$\int_a^b f^2(x)dx \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b f'^2(x)dx$$

练习 3.12. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,$0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, 证明:

$$2\int_0^1 xf(x)dx \geqslant \left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2$$

练习 3.13. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微, 且 $f(0)=0, f'(x) \geqslant 0$, 对于 $0<\alpha<\beta<1$, 求证:

$$\int_0^1 f(x)dx \geqslant \frac{1-\alpha}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)dx$$

练习 3.14. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可微,$f(0)+f(1)=0$, 证明:

$$\left|\int_0^1 f(x)dx\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 |f'(x)|dx$$