第8讲：再谈函数连续性及无穷小(大)的比较

(一) 函数极限的性质：(设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，$A,B\in R$)

(1) 唯一性，$f(x)$在x_0处的极限若存在则唯一。

可设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A_1\in R$，且 $A_1\neq A$，若 $A>A_1$，则 $\varepsilon=\frac{A-A_1}{2}>0$，对此 $\varepsilon>0$，

从 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Rightarrow \exists\delta_1>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，$f(x)>A-\varepsilon=A-\frac{A-A_1}{2}=\frac{A+A_1}{2}$，

从 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A_1 \Rightarrow \exists\delta_2>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时，$f(x)<A_1+\varepsilon=A_1+\frac{A-A_1}{2}=\frac{A+A_1}{2}$.

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$\frac{A+A_1}{2}<f(x)<\frac{A+A_1}{2}$，矛盾！

$\therefore A\leq A_1$，而 $A<A_1$ 时同样矛盾！$\therefore A\geq A_1$，最后 $A=A_1$，唯一性得证。

(2) 局部有界性：从 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Rightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，对 $\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$，$|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立 $\Rightarrow |f(x)|\leq|f(x)-A|+|A|<\varepsilon+|A|\triangleq M$，$\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$

(3) 保号性：若 $f(x)\geq 0$，$\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta_1)$，则 $A\geq 0$ (反证法：设 $A<0$，记 $\varepsilon=\frac{-A}{2}$，则 $\varepsilon>0$，从 $f(x)\to A\ (x\to x_0) \Rightarrow \exists\delta_2>0$，$x\in\mathring{U}(x_0,\delta_2)$ 时 $f(x)<A+\varepsilon=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}<0$ 恒成立，取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时 $0\leq f(x)<\frac{1}{2}A<0$ 矛盾！$\therefore A\geq 0$).

(4) 保序性：若 $f(x)\geq g(x)$，则 $A\geq B$（只要令 $h(x)=f(x)-g(x)$，

则 $h(x)\geq 0$ 且 $h(x)\to A-B$ $(x\to x_0)$，$\therefore A-B\geq 0\Leftrightarrow A\geq B$）

(三) 函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续的四个充要条件：

Ⅰ. $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$；Ⅱ. $\underbrace{f(x_0-0)}_{左C}=f(x_0)=\underbrace{f(x_0+0)}_{右C}$ 即 $f(x)$ 在 x_0 处 $C\Leftrightarrow f(x)$ 在 x_0 处既左 C 又右 C；

Ⅲ. $f(x)=f(x_0)+\alpha(x)$，$\alpha(x)\to 0$ $(x\to x_0)$；Ⅳ. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，$\begin{cases}\Delta x=x-x_0\\ \Delta y=f(x)-f(x_0)\end{cases}$

Δx，Δy 分别称为自变量的增量与函数的增量。

证Ⅲ："$\Rightarrow$" 已知 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. 令 $\alpha(x)=f(x)-f(x_0)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)-f(x_0)=f(x_0)-f(x_0)=0\Rightarrow f(x)=f(x_0)+\alpha(x)$，且 $\alpha(x)\to 0$ $(x\to x_0)$；"$\Leftarrow$" 已知 $f(x)=f(x_0)+\alpha(x)$，且 $\alpha(x)\to 0$ $(x\to x_0)$.

则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(f(x_0)+\alpha(x))=f(x_0)+\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=f(x_0)+0=f(x_0)$，故 $f(x)$ 在 x_0 处 C.

证Ⅳ：$\because x\to x_0\Leftrightarrow \Delta x\to 0$，$f(x)\to f(x_0)\Leftrightarrow \Delta y\to 0$ $(x\to x_0)$. 故

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=0\Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$

(三) n个常用的记号：($\delta>0$ 常数) 设 $\begin{cases}\alpha(x)\to 0\ (\infty)\\ \beta(x)\to 0\ (\infty)\end{cases}$ $(x\to x_0)$

(1). 点 x_0 的 δ 邻域：$(x_0-\delta, x_0+\delta)\triangleq U(x_0,\delta)$

(2). 点 x_0 的去心 δ 邻域：$(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)\triangleq \dot{U}(x_0,\delta)$

小o 表示无穷小 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{o(\beta(x))}{\beta(x)}=0$

(3). 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则记 $\alpha(x)=o(\beta(x))$ $(x\to x_0)$：$\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小

(或 $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 高阶的无穷大)

$\left|\dfrac{O(\beta(x))}{\beta(x)}\right|\le M$ 大O 表示有界量

(4). 若 $\exists M>0$，使 $\left|\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right|\le M$，$\forall x\in\dot{U}(x_0,\delta)$ 则记 $\alpha(x)=O(\beta(x))$，$x\in\dot{U}(x_0,\delta)$

例1. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A\in\mathbb{R}$ 且 $A\neq 0$，则必有 $\alpha(x)=O(\beta(x))$，$x\in\dot{U}(x_0,\delta)$

(理由：有极限必局部有界)，此时称 $\alpha(x),\beta(x)$ 为同阶无穷小(大)

且 $\alpha(x)\sim A\beta(x)$，$(x\to x_0)$.

例2. 设 $a_n=\ln n$，$b_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$，$C_n=n$，$d_n=\sqrt[n]{n!}$ 则 $n\to\infty$

时，$a_n, b_n\ C_n\ d_n\to\infty$ 且 $a_n=O(b_n)$，$C_n=O(d_n)$. 即

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=O(\ln n)$，$\sqrt[n]{n!}=O(n)$ $(n\to\infty, n\in\mathbb{N}^*)$

$x\to 0$ 时 $o(x)+o(x^2)+o(x^3)=o(x)$

$x\to\infty$ 时 $o(x)+o(x^2)+o(x^3)=o(x^3)$

例3. 当 $x\to x_0$ 时，证明：$\alpha(x)\to 0\ (\infty)$，$\beta(x)\to 0\ (\infty)$.

$\begin{cases}(1^\circ)\ o(\alpha(x))\cdot o(\beta(x))=o(\alpha(x)\beta(x))\\ (2^\circ)\ O(\alpha(x))\cdot O(\beta(x))=O(\alpha(x)\beta(x))\\ (3^\circ)\ O(o(\alpha(x)))=o(\alpha(x))\\ (4^\circ)\ o(O(\alpha(x)))=o(\alpha(x))\end{cases}$

不论 $x\to 0$ 或 $x\to\infty$

$\begin{cases}o(x)o(x^2)o(x^3)=o(x^6)\\ O(x)O(x^2)O(x^3)=O(x^6)\end{cases}$

(3)

证(1°) ∵ $\dfrac{o(\alpha(x))\cdot o(\beta(x))}{\alpha(x)\cdot\beta(x)}=\dfrac{o(\alpha(x))}{\alpha(x)}\cdot\dfrac{o(\beta(x))}{\beta(x)}\longrightarrow 0\times 0=0\quad(x\to x_0)$

∴ $o(\alpha(x))\cdot o(\beta(x))=o(\alpha(x)\cdot\beta(x))$; $(x\to x_0)$

证(2°) ∵ $\left|\dfrac{O(\alpha(x))\cdot O(\beta(x))}{\alpha(x)\cdot\beta(x)}\right|=\left|\dfrac{O(\alpha(x))}{\alpha(x)}\right|\left|\dfrac{O(\beta(x))}{\beta(x)}\right|\le M_1\cdot M_2\triangleq M>0$.

∴ $O(\alpha(x))\cdot O(\beta(x))=O(\alpha(x)\cdot\beta(x))\quad(x\to x_0)$.

证(3°) ∵ $\dfrac{O(o(\alpha(x)))}{\alpha(x)}=\underbrace{\dfrac{O(o(\alpha(x)))}{o(\alpha(x))}}_{\text{有界}}\underbrace{\dfrac{o(\alpha(x))}{\alpha(x)}}_{\to 0}\longrightarrow 0\quad(x\to x_0)$

有界变量与无穷小量之积仍为无穷小量。∴ $O(o(\alpha(x)))=o(\alpha(x))\quad(x\to x_0)$

证(4°) ∵ $\dfrac{o(O(\alpha(x)))}{\alpha(x)}=\underbrace{\dfrac{o(O(\alpha(x)))}{O(\alpha(x))}}_{\to 0}\underbrace{\dfrac{O(\alpha(x))}{\alpha(x)}}_{\text{有界}}\longrightarrow 0\quad(x\to x_0)$,

∴ $o(O(\alpha(x)))=o(\alpha(x))\quad(x\to x_0)$

(四). $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续是指$f(x)$在(a,b)中每点C且在左端点右C：$f(a)=f(a+0)$；在右端点左C：$f(b)=f(b-0)$.

$f(x)$在$[a,+\infty)$中C，是指f在$(a,+\infty)$中每点C且在a点右C：$f(a)=f(a+0)$.

合称$f(x)$的第一类间断点。

若$f(x)$在x_0处间断，则
- (1°) 若$f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$均存在且相等 $\Leftrightarrow$ x_0是$f(x)$的可去~.
- (2°) 若$f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$均存在不相等 $\Leftrightarrow$ x_0是$f(x)$的跳跃~,
- (3°) 若$f(x_0-0)=\infty$或$f(x_0+0)=\infty$ $\Leftrightarrow$ x_0是$f(x)$的无穷~.
- (4°) 若$f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$至少有一个不存在且$f(x_0-0)\ne\infty$, $f(x_0+0)\ne\infty$ 称x_0是$f(x)$第二类间断中的除其它间断点。

(4).

(五) 几个特别的非初等函数的连续性：

(1) 迪利克雷（Dirichlet）函数：$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\ (\text{有理数})\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$

则(1°). $D(x)$在$(-\infty,+\infty)$中有界且是周期函数，任意一个正有理数q_0都是$D(x)$的周期，从而$D(x)$不存在最小正周期；

(2°). $D(x)$在$(-\infty,+\infty)$中处处间断；

(3°). $g(x)\triangleq xD(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$，$g(x)$仅在$x=0$处连续。

证(1°)：$\exists M=1>0$，使$|D(x)|\le M$，$\forall x\in R$，从而$D(x)$是R上的有界函数。

对$\forall x\in Q$，$x+q_0\in Q$，$\therefore D(x)=1=D(x+q_0)$；对$\forall x\in R-Q$，$x+q_0\in R-Q\Rightarrow$ $D(x+q_0)=0=D(x)$，从而q_0是$D(x)$的周期. 且正有理数无最小值存在。

证(2°) 对$\forall x_0\in Q$，$\exists\varepsilon_0=\frac{1}{2}>0$，对$\forall\delta>0$，$\exists x_1\in R-Q$，且$|x_1-x_0|<\delta$，而$|D(x_1)-D(x_0)|=|0-1|=1>\varepsilon_0$，从而$D(x)$在$x_0$处间断；对$\forall x_0\in R-Q$，$\exists\varepsilon_0=\frac{1}{2}>0$，对$\forall\delta>0$，$\exists x_2\in Q$，且$|x_2-x_0|<\delta$，但$|D(x_2)-D(x_0)|=|1-0|=1>\varepsilon_0$，从而$D(x)$在$x_0$处间断。

证(3°)：$\because g(0)=0D(0)=0\times1=0$，且 $0\le|g(x)|=|xD(x)|\le|x|\cdot1$ 且 $\lim\limits_{x\to0}0=\lim\limits_{x\to0}|x|=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}|g(x)|=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to0}g(x)=0=g(0)\Rightarrow g(x)$在$x=0$处C；若$x\neq0$时，$g(x)$也C，则$D(x)=\frac{g(x)}{x}$在$x\neq0$时C，矛盾. 故$x\neq0$时，$g(x)$不C

(2) Riemann函数 $R(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ \frac{1}{q}, & x=\frac{p}{q}, p,q互质且q>0, p,q\in Z.\\ 0, & x为无理点.\end{cases}$

则(1°) $R(x)$在$(-\infty,+\infty)$处处有定义，有界且周期为1的周期函数；

(2°) $R(x)$在任一点x_0处极限为零：$\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0$. $\forall x_0\in R$.

(3°) $R(x)$在无理点处都连续，在有理点处都可去间断。

(思考题)

(3). Riemann的 $\zeta(x)\triangleq\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$，$x\in(1,+\infty)$.

$\zeta(x)$在$(1,+\infty)$处处C，处处可微。且$\zeta(x)\in C^{\infty}(1,+\infty)$，即$\zeta(x)$的任意阶导函数都在$(1,+\infty)$中存在且连续。

(4). $\Gamma(x)\triangleq\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$，$x\in(0,+\infty)$.

$\Gamma(x)$在$(0,+\infty)$中处处C，处处可微，且$\Gamma(x)\in C^{\infty}(0,+\infty)$

(六) 作业：EX2.1

4; 5; 6/(2),(4),(5); 7; 8; 17/(1),(3),(4).

(七). 第9讲：闭区间上连续函数的性质 (2024.9.27)