第七讲：函数连续性与无穷小(大)的比较

(一) 函数 $y=f(x)$ 的连续性 (continuous)：(设 x_0 是常数)

(1). $f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)=f(\lim\limits_{x\to x_0} x) \overset{?}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ 当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 恒成立.

(2). $f(x)$ 在 x_0 处间断 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$：称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

$f(x)$ 的间断点分类：$\begin{cases} \text{(I). } f(x_0-0),\ f(x_0+0) \text{ 均存在的间断点为第一类间断点} \\ \text{(II). } f(x_0-0),\ f(x_0+0) \text{ 至少有一个不存在的间断点为第二类间断点。} \end{cases}$

例1. 六类基本初等函数 $f(x)=$ 幂、指、对、三、反，在其定义域内皆连续，如 $f(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ 在 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时都 C，且从 $f(\frac{\pi}{2}-0)=+\infty$，$f(\frac{\pi}{2}+0)=-\infty$ 知，$x_0=\frac{\pi}{2}$ 是 $\tan x$ 的第二类间断点.

符号函数 (sign：符号)

又如 $f(x)=\operatorname{sgn}x \triangleq \begin{cases} -1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ +1 & x>0 \end{cases}$ 中 $\because f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-1)=-1$，$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(+1)=+1$，但 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\neq f(0)=0$ 故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的间断点且是 $f(x)$ 的第一类间断点 (跳跃间断点)

Th1：连续函数的和、差、积、商（有限项求和、差且分母不为零）仍是连续函数。

例1：设 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)$ 都在区间 I 上 C 且 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 为任意常数，则线性组合：$c_1f_1(x)+\cdots+c_mf_m(x)$ 仍在区间 I 上 C。

证：对 $\forall x_0 \in I$，$\because \lim\limits_{x\to x_0}(c_1f_1(x)+\cdots+c_mf_m(x)) = c_1\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)+\cdots+c_m\lim\limits_{x\to x_0}f_m(x)$
$= c_1f_1(x_0)+\cdots+c_mf_m(x_0)$，$\therefore c_1f_1(x)+\cdots+c_mf_m(x)$ 在点 x_0 处 C，再由 x_0 在 I 中的任意性知，$c_1f_1(x)+\cdots+c_mf_m(x)$ 在区间 I 上 C。

例1表明：连续的函数具有线性性质。

Th2：连续的函数 $y=f(x)$ 若有反函数：$x=g(y)$ 或写成 $y=g(x)$，则反函数 $y=g(x)$ 也是连续函数。理由：
正函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=g(x)$ 关于直线：$y=x$ 是对称的。

例3. $y=\sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 中 C 且严增，故有连续的反函数：$y=\arcsin x$，$x\in[-1,1]$，$y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$；$y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 中 C 且严减，故有连续的反函数：$y=\arccos x$，$x\in[-1,1]$，$y\in[0,\pi]$；$y=\tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 中 C 且严增，故有反函数：$y=\arctan x$，$x\in(-\infty,+\infty)$，$y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$；$y=\cot x$ 在 $(0,\pi)$ 中 C 且严减，故有反函数：$y=\text{arccot}\, x$，$x\in(-\infty,+\infty)$，$y\in(0,\pi)$. ②、

(注：六个反三角函数都是有界变量)

$y=e^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 中C且严格单调，故有连续的反函数

$y=\ln x$ 且反函数也是严格单调函数。

Th3：连续函数的复合函数仍是连续函数。

证：设 $y=f(u)$，$u=g(x)$ 均C且复合 $f(g(x))$ 有定义，求证 $f(g(x))$ C.

设 $\begin{cases}u=g(x)\\ u_0=g(x_0)\end{cases}$，且 $u=g(x)$ 在 x_0 处C，$f(u)$ 在 u_0 处C.

由 $f(u)$ 在 u_0 处C $\Longrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists\eta>0$，当 $|u-u_0|<\eta$ 时，$|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon$.

又 $g(x)$ 在 x_0 处C $\Longrightarrow$ 对于这 $\eta>0$，$\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$|g(x)-g(x_0)|<\eta$

即 $|u-u_0|<\eta \Longrightarrow |f(u)-f(u_0)|<\varepsilon \Longrightarrow |f(g(x))-f(g(x_0))|<\varepsilon$，即 $f(g(x))$ C.

由六种基本初等函数经过有限次四则运算，有限次复合运算得到的函数统称为初等函数。

Th4：一切初等函数，包括一切基本初等函数，在其定义域内皆是连续函数。(注：初等函数的定义域中若存在孤立点 x_0，则该初等函数 $f(x)$ 在 x_0 处仍是连续的。)

证.

例如：初等函数 $f(x)=\sqrt{\sin^2 x-1}$ 在定义域 $x_k=k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z$ 的每个孤立点处都是连续的。

(三) 无穷小量的比较：(设 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)\to 0$，$\beta(x)\to 0$ 且 $\beta(x)\neq 0$)

(1). 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$ 则称 $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 高阶的无穷小，记作 $\alpha(x)=o(\beta(x))$；例如：$\because \lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{x}=0$ $\therefore \tan^2 x=o(x)$

(2). 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C_0\neq 0, C_0\in R$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶(级)无穷小，当 $C_0=1$ 时，称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小，记作：$\alpha(x)\sim\beta(x)$ $(x\to x_0)$。例如：$\sin x\sim x\sim \ln(1+x)\sim e^x-1\sim\tan x$ $(x\to 0)$；$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$；$a^x-1\sim x\ln a$，$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$ $(x\to 0)$.

(3). 当 $x\to x_0$ 时，若 $\exists k\in R^+$，使 $\alpha(x)$ 与 $(x-x_0)^k$ 为同阶无穷小，则称 $\alpha(x)$ 是关于 $(x-x_0)$ 的 k 阶无穷小。

例4. 当 $x\to 0$ 时，证明无穷小量 $\tan x-\sin x$ 是 x 的三阶无穷小。

证：$\because \lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$

$=\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\right)=\frac{2}{4}\times 1\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\neq 0.$

$\therefore \tan x-\sin x$ 是关于 $x\to 0$ 即 x 的3阶无穷小。

(4).

(三) 无穷大量的比较：设 $\alpha(x)\to\infty$，$\beta(x)\to\infty$ $(x\to x_0)$

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$ 则称 $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 高阶的无穷大，记作

$\alpha(x)=o(\beta(x))$；如当 $n\to\infty$ 时，$n!=o(n^n)$；$e^n=o(n!)$；$n^2=o(e^n)$.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C_0\neq0$，$C_0\in R$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的同阶

(级) 无穷大，当 $C_0=1$ 时，称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷大，记作 $\alpha(x)\sim\beta(x)$

$(x\to x_0)$，如：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\sim\ln n$；$n\sim e^{\ln n}$ $(n\to\infty)$.

熟练掌握下列关系式：$(\forall a>1,\ \alpha>0,\ m>0)$

$n^n>>n!>>a^n>>n^\alpha>>(\ln n)^m$ (n充分大)，

$x^x>>a^x>>x^\alpha>>(\ln x)^m$ (x充分大).

(四) 在积与商的极限中，无穷小(大)因子可用它们的等价无穷小(大)来代替而不影响原来的极限值。

设 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$，$\beta(x)\sim\beta_1(x)$ 则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\cdot\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}\cdot\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=1\times1\times\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

(五) 作业：ex1.3：16；17；18 (注：$u\to0$ 时，$\sqrt{1+u}-1\sim\frac{u}{2}$)

附反三角函数一览表及部分性质

名称	解析式	定义域	值域	增减性	奇偶性
反正弦	$y=\arcsin x$	$\|x\|\le 1$	$\|y\|\le\frac{\pi}{2}$	严增	奇函数
反余弦	$y=\arccos x$	$\|x\|\le 1$	$y\in[0,\pi]$	严减	$\arccos(-x)=$ $\pi-\arccos x$
反正切	$y=\arctan x$	$\|x\|<+\infty$	$\|y\|<\frac{\pi}{2}$	严增	奇函数
反余切	$y=\operatorname{arccot} x$	$\|x\|<+\infty$	$y\in(0,\pi)$	严减	$\operatorname{arccot}(-x)=$ $\pi-\operatorname{arccot} x$
反正割	$y=\operatorname{arcsec} x$	$\|x\|\ge 1$	$y\in[0,\frac{\pi}{2})$ 或 $y\in(\frac{\pi}{2},\pi]$	严增	$\operatorname{arcsec}(-x)=$ $\pi-\operatorname{arcsec} x$
反余割	$y=\operatorname{arccsc} x$	$\|x\|\ge 1$	$y\in[-\frac{\pi}{2},0)$ 或 $y\in(0,\frac{\pi}{2}]$	严减	奇函数.

(1). $\arcsin x+\arccos x\equiv\frac{\pi}{2}$, $\forall x\in[-1,+1]$.

(2). $\arctan x+\operatorname{arccot} x\equiv\frac{\pi}{2}$, $\forall x\in(-\infty,+\infty)$.

(3). $\operatorname{arcsec} x+\operatorname{arccsc} x\equiv\frac{\pi}{2}$, $\forall |x|\ge 1$.

(4). $\arcsin\frac{1}{x}=\operatorname{arccsc} x$, $\forall |x|\ge 1$

(5) $\sin(\arcsin x)\equiv x$, $\forall x\in[-1,1]$.

(6) $\sin(\operatorname{arccsc} x)=\frac{1}{x}$, $\forall |x|\ge 1$.