

# 目录

<b>1</b>	<b>数列极限</b>	<b>1</b>
1.1	几个常用的记号 . . . . .	1
1.2	微积分或数学分析必须建立在实数系上 $R$ 上 . . . . .	1
1.3	数列极限的科学定义 . . . . .	2
1.4	极限存在的两个常用准则 . . . . .	3
<b>2</b>	<b>数列极限的性质与应用</b>	<b>4</b>
2.1	复习数列极限的线性性质 . . . . .	4
2.2	数列极限的“四性” . . . . .	4
2.3	收敛数列极限的四则运算法则 . . . . .	5
2.4	例题 . . . . .	5
<b>3</b>	<b>数列极限习题课</b>	<b>6</b>
3.1	习题 . . . . .	6
3.2	关于无穷大 . . . . .	6
3.3	Stolz 定理及其应用 . . . . .	6
3.4	例题 . . . . .	7
<b>4</b>	<b>实数集连续性的五个等价命题</b>	<b>8</b>
4.1	五个等价命题 . . . . .	8
4.2	Stolz 定理的证明 . . . . .	8
4.3	例题 . . . . .	8
4.4	函数极限 24 种科学定义 . . . . .	9
<b>5</b>	<b>函数极限 24 种</b>	<b>10</b>
5.1	数列 $\{a_n\}$ 极限 4 种科学定义 . . . . .	10
5.2	函数极限的“ $\varepsilon - \delta$ ”定义法 . . . . .	10
5.3	函数极限的四则运算法则 . . . . .	11
5.4	3 个重要极限及其证明 . . . . .	11
<b>6</b>	<b>函数极限习题课</b>	<b>11</b>
6.1	24 种函数极限的否定形式 . . . . .	11
6.2	几个基本概念 . . . . .	13

目录	II
6.3 无穷大的大小	13
6.4 例题	13
<b>7 函数连续性与无穷小 (大) 的比较</b>	<b>14</b>
7.1 函数 $y = f(x)$ 的连续性	14
7.2 无穷小量的比较	16
7.3 无穷大量的比较	16
7.4 等价代换	16

## 第 1 讲 数列极限

### 1.1 几个常用的记号

1.  $\forall \leftarrow A \leftarrow any$ : 任意给定的一个; 给定后为常数
2.  $\exists \leftarrow E \leftarrow exist$ : 存在一个; 通常不唯一
3.  $\sup E$ : 数集  $E$  的最小上界, 即  $E$  的上确界 (supremum)

$\sup E$  同时满足两条件:

- (a)  $\forall x \in E, x \leq \sup E$ ;
- (b)  $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in E, \sup E - \varepsilon < x_0$ .

4.  $\inf E$ : 数集  $E$  的最大下界, 即  $E$  的下确界 (infimum)

$\inf E$  同时满足两条件:

- (a)  $\forall x \in E, x \geq \inf E$ ;
- (b)  $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in E, x_0 < \inf E + \varepsilon$ .

例 1.1. 设  $E = \{1, 3, 5, 8\}$ ,  $F = (-\sqrt{3}, \pi]$ , 则:

$\sup E = 8, \inf E = 1, \sup F = \pi, \inf F = -\sqrt{3}$ . 且有

1.  $\sup E = -\inf(-E)$ ;
2.  $\inf F = -\sup(-F)$ ;

注记. 这里的  $-E$  表示  $E$  的相反数集合, 即  $-E = \{-e : e \in E\}$ .

### 1.2 微积分或数学分析必须建立在实数系上 $R$ 上

理由: 极限运算时微积分的最基本运算, 而有理数集合  $Q$  关于极限运算时不封闭的. 例如:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e; \forall n \in N, (1 + \frac{1}{n}) \in Q$ , 但  $e \notin Q$ .

又如,  $\forall n \in N, a_n = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m^2} \in Q$ , 但  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\pi^2}{6} \notin Q$ .

实数集  $R$  在数轴上的点是连续不断的, 且关于极限运算时封闭的. 因此, 称实数集  $R$  是具有连续性. 实数集  $R$  的连续性也称为实数集的完备性.

描述实数集  $R$  连续性的公理通常有五个:

1. 确界存在原理;
2. 单调有界极限存在准则;
3. 极限存在的柯西 (Cauchy) 准则;
4. 闭区间套定理;
5. 列紧性原理, 即有界数列必有收敛子列定理.

这五个公理是互相等价的, 本课程采用“确界存在原理”作为实数集  $R$  连续性的公理.

注记. 这五条公理与课本 1.1.3 的连续性公理是等价的, 即任意一个公理都可以推导出另外四个公理. 因此这里说这五个等价命题描述了  $R$  的连续性.

### 公理 1.2. 确界存在原理

有上 (下) 界的非空实数集  $E$  必有上 (下) 确界  $\sup E(\inf E)$ .

## 1.3 数列极限的科学定义

设数列  $\{a_n\}$  以常数  $a$  为极限, 科学的定义如下:

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N$  都有  $|a_n - a| < \varepsilon$  成立, 则  $\{a_n\}$  以常数  $a$  为极限, 记为  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  或  $a_n \rightarrow a(n \rightarrow \infty)$ .

事实上, 所有的收敛的有理数列, 其极限点的全体即是实数集  $R$ . 即实数集  $R$  是有理数列的极限值构成的.

注记. 1.  $Q$  对极限是不封闭的; 2. 由  $Q$  组成的数列的极限可以是实数; 3. 由  $Q$  组成的数列的极限只能是实数; 4. 由  $Q$  组成的所有收敛数列, 他们的极限的集合, 恰好就是  $R$ , 不多不少.

理由如下:

对  $\forall x \in R$ , 设  $x$  的小数表示为:  $x = a_0.a_1a_2a_3 \cdots$ , 则有理数列:  $a_0, a_0.a_1, a_0.a_1a_2, \cdots$  当  $n \rightarrow \infty$  时, 其极限为  $x$ . 若  $x$  是有理数, 则  $a_0.a_1a_2 \cdots a_n$  是有限小数或循环小数, 若  $x$  是无理数, 则  $a_0.a_1a_2 \cdots a_n$  是无限不循环小数, 则极限点  $x$  是无理数.

注记. 此处  $x = a_0.a_1a_2a_3 \cdots$ , 其中每一个  $a_i$  都是一个数字,  $a_0$  是整数部分,  $a_1a_2a_3 \cdots$  是小数部分. 比如,  $x = 3.1415926 \cdots$ , 那么  $a_0 = 3, a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 1, a_4 = 5, a_5 = 9, a_6 = 2, a_7 = 6, \cdots$ .

可以由  $x = a_0.a_1a_2a_3\cdots$  构造出一个数列  $\tau_1 = a_0, \tau_2 = a_0.a_1, \tau_3 = a_0.a_1a_2, \cdots$ , 说  $x$  为极限指的, 是  $x$  是数列  $\{\tau_n\}$  的极限, 记为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = x$ .

都用  $x$  代指, 是因为我这里不能确定  $x$  是不是有限小数, 有理数还是无理数. 但是  $x$  是数列  $\{\tau_n\}$  的极限是确定的.

#### 1.4 极限存在的两个常用准则

1. 单调有界极限存在准则: 若数列  $\{a_n\}$  单调增 (减) 且有上 (下) 界, 则  $\{a_n\}$  收敛. 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup a_n (\inf a_n)$ .

2. 夹逼准则 (即两边夹准则): 设数列  $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$  满足  $a_n \leq b_n \leq c_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ .

证明. 单调增有界极限存在.

设数列  $\{a_n\}$  单调增且有上界, 由确界存在定理,  $\{a_n\}$  有上确界. 令  $\sup a_n = \beta$ , 则  $\beta$  是  $\{a_n\}$  满足以下两点:

1.  $\forall n \in N, a_n \leq \beta$ ;
2.  $\forall \varepsilon > 0, \exists a_{n_0} \in \{a_n\}, \beta - \varepsilon < a_{n_0}$ .

又因为  $\{a_n\}$  单调增, 故  $\forall n > n_0, a_n \leq a_{n_0} > \beta - \varepsilon$ , 且  $a_n \geq \beta < \beta + \varepsilon$ . 即  $|\beta - a_n| < \varepsilon$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \beta$ .  $\square$

证明.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in N^*, \forall n > N, |a_n - a| < \varepsilon$ . 又  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in N^*, \forall n > N, |c_n - a| < \varepsilon$ .

取  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , 则  $\forall n > N, a_n \leq b_n \leq c_n$ , 故  $a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon$ . 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ .  $\square$

例 1.3. 下列  $a, b, q, c_1, c_2$  皆为常数).

1. 设  $|q| < 1$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} aq^n = 0$ ;
2. 设  $a > 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ ;
3. 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ;

4. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_1 a_n + c_2 b_n) = c_1 a + c_2 b$ . 即线性组合的极限等于极限的线性组合, 称此为极限的线性性质.

数列的极限具有线性性质, 同理函数极限也是具有线性性质的, 统称为极限的线性性质. 由极限的线性性质, 可导出微积分中绝大多数概念也具有线性性质. 如函数的导数、导数、微分、积分, 都具有线性性质.

作业. ex1.2:1(2)(4);3;4;5;6;8(5);15(1);19.

## 第 2 讲 数列极限的性质与应用

### 2.1 复习数列极限的线性性质

设  $a, b, c_1, c_2$  为常数且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_1 a_n + c_2 b_n) = c_1 a + c_2 b = c_1 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + c_2 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

从上述极限的线性性质, 不难得到以下结论:

1. 当  $c_1 = c_2 = 1$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ ;
2. 当  $c_1 = 1, c_2 = -1$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ ;
3. 当  $c_1 = k, c_2 = 0$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} k a_n = k \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .
4. 数列的线性性质可推广到任意有限个收敛数列的情形: 设  $a_{1n} \rightarrow a_1, a_{2n} \rightarrow a_2, \dots, a_{mn} \rightarrow a_m$ , 且  $a_1, a_2, \dots, a_m, c_1, c_2, \dots, c_m$  为常数, 则

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} (c_1 a_{1n} + c_2 a_{2n} + \dots + c_m a_{mn}) \\ &= c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_m a_m \\ &= c_1 \lim_{n \rightarrow \infty} a_{1n} + c_2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} + \dots + c_m \lim_{n \rightarrow \infty} a_{mn} \end{aligned}$$

对  $\forall m \in N^*$  成立.

### 2.2 数列极限的“四性”

1. 有界性: 若  $\{a_n\}$  收敛, 则  $\{a_n\}$  有界, 反之未必;
2. 唯一性: 若  $\{a_n\}$  收敛, 则其极限唯一;
3. 保号性: 若  $\{a_n\}$  收敛且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a_n \geq 0, \forall n \geq n_0$ , 则必有  $a \geq 0$ ;
4. 保序性: 若  $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$ , 且  $a_n \leq (\geq) b_n, \forall n \geq n_0$ , 则必有  $a \leq (\geq) b$ .

### 2.3 收敛数列极限的四则运算法则

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n},$  其中  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0.$

证明. 仅证  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b} (b \neq 0), n \rightarrow \infty$

$$\text{注意到 } \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b||b_n|}$$

不妨设  $b > 0$ , 即  $\exists N_1, \forall n > N_1, s.t. b_n > b - \varepsilon$  (a)

$$\text{取 } \varepsilon < \frac{b}{2}, \text{ 则 } b_n > b - \varepsilon \stackrel{(a)}{=} \frac{b}{2} \text{ (b)}$$

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , 对  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_2, \forall n > N_2, |b_n - b| < \varepsilon$  (c)

$$\text{得 } \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b||b_n|} \stackrel{(b)}{<} \frac{|b_n - b|}{b \frac{b}{2}} \stackrel{(c)}{<} \frac{\varepsilon}{\frac{b^2}{2}}$$

□

### 2.4 例题

例 2.1. 设  $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n, n \in N^*$ , 证明:

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e \approx 2.7182818128;$
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{x})^x, x \in R$
3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e, x \in R$

例 2.2. 证明闭区间套定理: 若  $\{[a_n, b_n]\}$  是一列闭区间, 满足  $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}], n = 1, 2, \dots$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ , 则存在唯一的实数  $\xi$ , 使得  $\xi \in [a_n, b_n], n = 1, 2, \dots$ .

注记. 闭区间套定理, 是刻画实数集  $R$  的连续性的五个等价公理之一.

为了纪念数学家 Euler(欧拉) 在其中的贡献, 将  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$  记为  $e$ . 经计算可知,  $e \approx 2.718281828$ . 讲义中还证明了  $e$  是一个无理数, 且将以  $e$  为底的对数称为自然对数, 记为  $\ln x$ , 即  $\ln x = \log_e x$ .

作业. ex1.2: 14;15(3)(4);16;18(3);22(2)(4);CH1:3(2).

## 第 3 讲 数列极限习题课

### 3.1 习题

$$1. \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, n \in N^*.$$

$$2. \left(\frac{1}{n+1}\right) < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \left(\frac{1}{n}\right), n \in N^*.$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}, \text{ 即 } \sqrt[n]{n!}e \sim n.$$

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n, n \in N^*, \text{ 证明:}$$

1.  $\{a_n\}$  收敛;

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} = \ln 2;$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n+1} + \cdots + \frac{1}{3n+2n} = \ln \frac{5}{3};$$

$$4. 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \sim \ln n.$$

### 3.2 关于无穷大

$$1. \{a_n\} \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in N^*, \forall n > N, a_n > M.$$

$$2. \{a_n\} \rightarrow -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in N^*, \forall n > N, a_n < -M.$$

$$3. \{a_n\} \rightarrow \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in N^*, \forall n > N, |a_n| > M.$$

### 3.3 Stolz 定理及其应用

**定理 3.1** (Stolz 定理). 设  $\{a_n\}, \{b_n\}$  是两个数列, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ , 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = A$$

, 其中  $A$  可以是有限数, 也可以是  $\pm\infty$ ;  $\{b_n\}$  是严格单调递增且趋于  $+\infty$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}.$$

注记. 完整的利用 *Stolz* 定理的过程要求先证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = A$  极限存在并求得  $A$ , 然后再利用 *Stolz* 定理求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ . 不过不严谨的直接写出  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$  也是能接受的.

注记 3.2. 当  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \infty$  时, *Stolz* 定理不一定成立. 反例可取  $a_n = (-1)^n, b_n = n$ .

### 3.4 例题

例 3.3. 证明:

1. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$ ;
2. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \geq 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$ .
3. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a$ .

例 3.4. 设  $a_1, a_2, \cdots, a_m$  是  $m$  个常数, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_1|^n + |a_2|^n + \cdots + |a_m|^n} = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_m|\}.$$

- 例 3.5. 1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n^2} = \frac{1}{2}$ ;
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3} = \frac{1}{3}$ ;
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3}{n^4} = \frac{1}{4}$ .
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$ .

定理 3.6. 常用的平均值不等式:

设  $a_1, a_2, \cdots, a_n$  是  $n$  个正数, 则有:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

作业. ex1.2:9;13;18(5);20;22(3);23;CH1:10(1);11.

## 第 4 讲 实数集连续性的五个等价命题

### 4.1 五个等价命题

1. 确界存在原理: 有上(下)界的非空实数集  $E$  必有上(下)确界  $\sup E(\inf E)$ .
2. 单调有界极限存在准则: 若数列  $\{a_n\}$  单调增(减)且有上(下)界, 则  $\{a_n\}$  收敛. 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup a_n(\inf a_n)$ .
3. 闭区间套定理: 若  $\{[a_n, b_n]\}$  是一列闭区间, 满足  $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}], n = 1, 2, \dots$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ , 则存在唯一的实数  $\xi$ , 使得  $\xi \in [a_n, b_n], n = 1, 2, \dots$ .
4. 列紧性原理: 若  $\{a_n\}$  有界且含无穷多项, 则  $\{a_n\}$  必有收敛子列  $\{a_{n_k}\}$ .
5. 柯西 (Cauchy) 准则: 数列  $\{a_n\}$  收敛的充要条件是: 对  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n, m > N, |a_n - a_m| < \varepsilon$ .

例 4.1. 证明确界原理推连续性.

由  $Y \neq \emptyset$ , 故  $X$  有上界,

由确界原理,  $X$  有上确界, 同理  $Y$  有下确界, 记  $c_1 = \sup X, c_2 = \inf Y$ , (目标: 找到  $c, s.t. \forall a \in X, b \in Y, a \leq c \leq b$ )

若  $c_1 \in X$ , 则取  $c = c_1$ .

若  $c_1 \notin X$ , 则  $c_1 \in Y, c_2 \in Y \Rightarrow c = c_2; c_2 \notin Y \Rightarrow c_2 \in X, c_2 < c_1$  这与  $\forall x \in X, y \in Y, x < y$  矛盾.

### 4.2 Stolz 定理的证明

### 4.3 例题

例 4.2. 收敛的数列  $\{a_n\}$  被称为 "Cauchy 列" 或 "基本列".

1. 设  $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*$ , 证明  $\{a_n\}$  是 Cauchy 列;
2. 设  $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$ , 证明  $\{a_n\}$  不是 Cauchy 列.

## 4.4 函数极限 24 种科学定义

设  $x_0$  为常数

⇒ 表示”则有...”, 在此处在 ⇔ 的子语句之中.

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$
3.  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$
4.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$
5.  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) > M.$
6.  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) > M.$
7.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M.$
8.  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) < -M.$
9.  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) < -M.$
10.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M.$
11.  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x)| > M.$
12.  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x)| > M.$
13.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X_0 > 0, \forall x > X_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$
14.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X_0 > 0, \forall x < -X_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$
15.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X_0 > 0, \forall |x| > X_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$
16.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall x > X_0 \Rightarrow f(x) > M.$
17.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall x > X_0 \Rightarrow f(x) < -M.$
18.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall |x| > X_0 \Rightarrow |f(x)| > M.$
19.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall x < -X_0 \Rightarrow f(x) > M.$
20.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall x < -X_0 \Rightarrow f(x) < -M.$

$$21. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall |x| > X_0 \Rightarrow |f(x)| > M.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall |x| > X_0 \Rightarrow f(x) > M.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall |x| > X_0 \Rightarrow f(x) < -M.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall |x| > X_0 \Rightarrow |f(x)| > M.$$

作业. ex1.2:17(2)(3)(4),24;CH1:3(1),7,9,10(2),11.

## 第 5 讲 函数极限 24 种

### 5.1 数列 $\{a_n\}$ 极限 4 种科学定义

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N, |a_n - a| < \varepsilon.$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N, a_n > M.$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N, a_n < -M.$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N, |a_n| > M.$$

例 5.1.  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = +\infty$ .

### 5.2 函数极限的 "ε - δ" 定义法

定义 5.2. 设  $x_0$  为常数, 函数在  $x_0$  处的极限为  $a$  定义为:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

若  $x$  从大于  $x_0$  的一侧趋近于  $x_0$ , 则称为  $x_0$  的右极限, 记为  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$ ; 若  $x$  从小于  $x_0$  的一侧趋近于  $x_0$ , 则称为  $x_0$  的左极限, 记为  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$ .

定理 5.3.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ . ( $x_0$  为常数)

定理 5.4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

例 5.5.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ .

### 5.3 函数极限的四则运算法则

**定理 5.6.** 设  $x_0, a, b, c_1, c_2$  为常数, 令  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ , 则:

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (c_1 f(x) + c_2 g(x)) = c_1 a + c_2 b$ ;
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = a \cdot b$ ; 特别地,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = a^2$ ;
3.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b} (b \neq 0)$ .

**注记 5.7.** 函数极限:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in R$  也是有“四性”, 即局部有界性, 唯一性, 保号性, 保序性.

**注记 5.8.** 局部有界性的证明: 设函数  $y = f(x)$  的定义域为  $I$ , 点  $x_0 \in I$ , 且  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon \Leftrightarrow |f(x)| < |a| + \varepsilon$ . 因此, 函数  $f(x)$  在  $x_0$  的某邻域内有界, 但  $f(x)$  在整个定义域  $I$  内未必有界.

### 5.4 3 个重要极限及其证明

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ;
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ ;
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & n = m; \\ 0, & n < m; \\ \infty, & n > m. \end{cases}$

作业. ex1.3:1(2)(3);2(2)(4);3(2);5(1)(2);9(3)(4);10(3);CH1:13.

## 第 6 讲 函数极限习题课

### 6.1 24 种函数极限的否定形式

设  $x_0, A$  为常数.

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq A \Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| \geq \varepsilon_0$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq A \Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x, x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - A| \geq \varepsilon_0.$
3.  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq A \Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x, x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - A| \geq \varepsilon_0.$
4.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq +\infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall \delta > 0, \exists x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \leq M.$
5.  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq +\infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall \delta > 0, \exists x, x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) \leq M.$
6.  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq +\infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall \delta > 0, \exists x, x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq M.$
7.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq -\infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall \delta > 0, \exists x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \geq -M.$
8.  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq -\infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall \delta > 0, \exists x, x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) \geq -M.$
9.  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq -\infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall \delta > 0, \exists x, x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) \geq -M.$
10.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq \infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall \delta > 0, \exists x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq M.$
11.  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall \delta > 0, \exists x, x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x)| \leq M.$
12.  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall \delta > 0, \exists x, x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x)| \leq M.$
13.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq A \Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \forall X_0 > 0, \exists x, x > X_0 \Rightarrow |f(x) - A| \geq \varepsilon_0.$
14.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \neq A \Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \forall X_0 > 0, \exists x, x < -X_0 \Rightarrow |f(x) - A| \geq \varepsilon_0.$
15.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq A \Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \forall X_0 > 0, \exists x, |x| > X_0 \Rightarrow |f(x) - A| \geq \varepsilon_0.$
16.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq +\infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall X_0 > 0, \exists x, x > X_0 \Rightarrow f(x) \leq M.$
17.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq -\infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall X_0 > 0, \exists x, x > X_0 \Rightarrow f(x) \geq -M.$
18.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq \infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall X_0 > 0, \exists x, |x| > X_0 \Rightarrow |f(x)| \leq M.$
19.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \neq +\infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall X_0 > 0, \exists x, x < -X_0 \Rightarrow f(x) \leq M.$
20.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \neq -\infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall X_0 > 0, \exists x, x < -X_0 \Rightarrow f(x) \geq -M.$
21.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \neq \infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall X_0 > 0, \exists x, |x| > X_0 \Rightarrow |f(x)| \leq M.$
22.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq +\infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall X_0 > 0, \exists x, |x| > X_0 \Rightarrow f(x) \leq M.$
23.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq -\infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall X_0 > 0, \exists x, |x| > X_0 \Rightarrow f(x) \geq -M.$
24.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq \infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall X_0 > 0, \exists x, |x| > X_0 \Rightarrow |f(x)| \leq M.$

**注记 6.1.** 24 种函数极限的肯定形式 (科学定义) 在第 4 讲: 实数集连续性的五个等价命题的附 (3) 与附 (4) 两页中. (助教注: 即 4.4). 先写出每种极限的肯定形式, 就容易写出对应的否定形式.

## 6.2 几个基本概念

(1) 以零为极限的变量称为无穷小量; 绝对值无限增大的变量称无穷大量. 常数中只有零是无穷小量, 非零无穷小与无穷大具有倒数关系.

**例 6.2.**  $x \rightarrow 0$  时,  $\sin x, x^m (m > 0), \tan x, e^x - 1, 1 - \cos x$  都是无穷小量;

$n \in N^*, n \rightarrow \infty$  时,  $n^n, n!, a^n (a > 1), n^\alpha (\alpha > 0), \ln n$  都是无穷大量.

(2) 若函数  $f(x)$  在  $x_0$  处有定义, 且  $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , 则称  $f(x)$  在  $x_0$  处连续, 若  $f(x)$  在区间  $I$  上每一点都连续, 则称  $f(x)$  在  $I$  上连续. 当  $f(x)$  在  $x_0$  处连续时, 有  $f(x_0) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , 即连续函数的极限与函数值可以交换次序.

(3) 幂 ( $x^\alpha, \alpha$  为常量), 指数 ( $a^x, a > 0$ ), 三角函数 ( $\sin x, \cos x, \tan x$ ), 对数函数 ( $\log_a x, a > 0, a \neq 1$ ), 指数函数 ( $e^x$ ), 反三角函数 ( $\arcsin x, \arccos x, \arctan x$ ), 双曲函数 ( $\sinh x, \cosh x, \tanh x$ ) 等函数在其定义域内均连续.

一切基本初等函数, 在其定义域内均连续.

## 6.3 无穷大的大小

**例 6.3.** 设  $a, \alpha, m$  为常数, 且  $a > 1, \alpha > 0, m > 0$ , 证明:

1.  $n^n \gg n! \gg a^n \gg n^\alpha \gg (\ln n)^m$ , 在  $n \rightarrow \infty, n \in N^*$  时成立; 其中  $n^n \gg n! \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$ , 称为  $n^n$  是  $n!$  的高阶无穷大.

2.  $x^x \gg a^x \gg x^\alpha \gg (\ln x)^m$ , 在  $x \rightarrow +\infty, x > 0, x \in R$  时成立.

## 6.4 例题

**例 6.4.** 证明:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2};$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1;$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1;$$

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1;$
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, a > 0, a \neq 1.$
6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \alpha \neq 0.$
7.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$
8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2 + 3x - 5}{x^2 + 6} \right)^{4x} = e^{12}.$

注记. 上述例 1~6 今后可作为公式直接使用, 并可记为: 当  $x \rightarrow 0$  时,

1.  $\frac{1 - \cos x}{x^2} \sim \frac{1}{2};$
2.  $\arcsin x \sim x;$
3.  $\ln(1+x) \sim x;$
4.  $l^x - 1 \sim x;$
5.  $a^x - 1 \sim \ln a \cdot x;$
6.  $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot x.$

作业. ex1.3:4;9(1)(2);10(1)(2)(4);11(1)(2).

## 第 7 讲 函数连续性与无穷小(大)的比较

### 7.1 函数 $y = f(x)$ 的连续性

设  $x_0$  是常数,

$$(1) f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 处连续} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x).$$

$$(2) f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 处间断} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0): \text{ 称 } x_0 \text{ 为 } f(x) \text{ 的间断点.}$$

$$f(x) \text{ 的间断点分类: } \begin{cases} \text{(I) } f(x_0 - 0), f(x_0 + 0) \text{ 均存在的间断点为第一类间断点;} \\ \text{(II) } f(x_0 - 0), f(x_0 + 0) \text{ 至少有一个不存在的间断点为第二类间断点.} \end{cases}$$

**例 7.1.** 六类基本初等函数(幂, 指数, 三角, 对数, 指数, 反三角, 双曲)在其定义域内均连续. 如  $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  在  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  时连续, 且从  $f(\frac{\pi}{2} - 0) = +\infty, f(\frac{\pi}{2} + 0) = -\infty$  可知  $f(x)$  在  $x = \frac{\pi}{2}$  处第二类间断点.

$$\text{又如 } f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

在  $x = 0$  处,  $f(0-0) = -1, f(0+0) = 1, f(0) = 0$ , 故  $f(x)$  在  $x = 0$  处第一类间断点.(跳跃间断点)

**定理 7.2.** 连续函数的和, 差, 积, 商仍是连续函数.

**例 7.3.** 设  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$  在区间  $I$  上连续, 且  $c_1, c_2, \dots, c_m$  为常数, 则线性组合  $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_m f_m(x)$  在  $I$  上连续. 这表明连续函数具有线性性.

**例 7.4.** 连续的函数  $y = f(x)$  若有反函数  $x = g(y)$  或写为  $y = g(x)$ , 则反函数  $y = g(x)$  也是连续函数. 理由: 函数与其反函数关于直线  $y = x$  对称.

**例 7.5.**  $y = \sin x$  在  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  上连续且单调增, 故有反函数  $x = \arcsin y$  在  $[-1, 1]$  上连续.

$y = \cos x$  在  $[0, \pi]$  上连续且单调减, 故有反函数  $x = \arccos y$  在  $[-1, 1]$  上连续且单调减.

$y = \tan x$  在  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  上连续且单调增, 故有反函数  $x = \arctan y$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续且单调增.

**注记.** 六个反三角函数都是有界变量

**例 7.6.**  $e^x$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续且单调增, 故有反函数  $x = \ln y$  在  $(0, +\infty)$  上连续且单调增.

**定理 7.7.** 连续函数的符合函数仍是连续函数.

由六种基本初等函数经过有限次四则运算, 有限次符合运算的函数统称为初等函数.

**定理 7.8.** 一切初等函数, 包括一切基本初等函数, 在其定义域内均连续.(注: 初等函数的定义域中若存在孤立点  $x_0$ , 则  $f(x)$  在  $x_0$  处仍是连续的.)

## 7.2 无穷小量的比较

设  $x \rightarrow x_0$  时,  $\alpha(x) \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$  且  $(\beta(x) \neq 0)$ .

(1) 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ , 则称  $\alpha(x)$  是  $\beta(x)$  的高阶无穷小, 记为  $\alpha(x) = o(\beta(x))$ ; 例如  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{x} = 0 \Rightarrow \tan^2 x = o(x)$ .

(2) 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$ , 则称  $\alpha(x)$  是  $\beta(x)$  的等阶无穷小, 记为  $\alpha(x) = O(\beta(x))$ ; 例如  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \sin x = O(x)$ .

(3) 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$ , 则称  $\alpha(x)$  是  $\beta(x)$  的等价无穷小, 记为  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ ; 例如  $\sin x \sim x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim \tan x (x \rightarrow 0)$ ;  $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, a^x - 1 \sim \ln a \cdot x, (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot x (x \rightarrow 0)$ .

(4) 当  $x \rightarrow x_0$  时, 若  $\exists k \in R^+$ , 使得  $\alpha(x) = O((x - x_0)^k)$ , 则称  $\alpha(x)$  是  $(x - x_0)$  的  $k$  阶无穷小

**例 7.9.** 当  $x \rightarrow 0$  时, 证明: 无穷小量  $\tan x - \sin x$  是  $x$  的三阶无穷小.

## 7.3 无穷大量的比较

设  $x \rightarrow x_0$  时,  $\alpha(x) \rightarrow \infty, \beta \rightarrow \infty$  且  $(\beta(x) \neq 0)$ .

(1) 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ , 则称  $\alpha(x)$  是  $\beta(x)$  的高阶无穷大, 记为  $\alpha(x) = o(\beta(x))$ ; 如当  $n \rightarrow \infty$  时,  $n! = o(n^n); e^n = o(n!); n^2 = o(n!)$ .

(2) 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$ , 则称  $\alpha(x)$  是  $\beta(x)$  的等阶无穷大, 特别地当  $A = 1$  时, 称  $\alpha(x)$  是  $\beta(x)$  的等价无穷大, 记为  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ ; 如当  $n \rightarrow \infty$  时,  $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \ln n; n \sim e \sqrt[n]{n}$ .

熟练掌握个别关系式:  $(\forall a > 1, \alpha > 0, m > 0)$

$$n^n \gg n! \gg a^n \gg n^\alpha \gg (\ln n)^m;$$

$$x^x \gg a^x \gg x^\alpha \gg (\ln x)^m;$$

## 7.4 等价代换

在积与商的极限中, 无穷小(大)因子可用等价无穷小(大)代换, 而不影响原来的极限值.

设  $x \rightarrow x_0$  时,  $\alpha(x) \sim \alpha_1(x), \beta(x) \sim \beta_1(x)$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

作业. ex1.3:16;17;18