第6讲：函数极限习题课

(一)知识基本概念：

(1) 以零为极限的变量称为无穷小量；绝对值无限增大的变量称为无穷大量。常数中只有零是无穷小量，非零无穷小与无穷大是倒数关系。

例1，$x\to 0$时，$\sin x$，$x^m\ (m>0)$，$\tan x$，e^x-1，$1-\cos x$都是无穷小量；

$n\in N^*$，$n\to\infty$时，n^n，$n!$，$a^n\ (a>1)$，$n^\alpha\ (\alpha>0)$，$\ln n$，都是无穷大量.

(2) 若函数$f(x)$在x_0处有定义，且$f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，($x_0$为常数)，则称函数$f(x)$在$x_0$处连续(continuous)，若$f(x)$在区间I上每点都连续，则称$f(x)$在区间I上连续。当$f(x)$在$x_0$处连续时，有

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=f(\lim\limits_{x\to x_0}x)$，即极限符号与函数符号可交换！

(3) 幂(x^α，α为常量)、指(a^x，$a>0$，$a\neq 1$，a为常量)、对($\log_a x$，$a>0$，$a\neq 1$)、常($f(x)\equiv C$)、三角($\sin x$，$\cos x$，$\tan x$，$\cot x$，$\sec x$，$\csc x$)、反三角($\arcsin x$、$\arccos x$，$\arctan x$，$\text{arccot}\, x$，$\text{arcsec}\, x$，$\text{arccsc}\, x$)统称为基本初等函数。

一切基本初等函数，在其定义域内皆连续。

(三) 设 a, α, m 为常数且 $a>1, \alpha>0, m>0$ 任意取定，证明：

(1). $n^n >> n! >> a^n >> n^\alpha >> (\ln n)^m$ （n充分大），$n\in N^*$

其中，$n^n >> n! \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0 \Leftrightarrow n^n$ 是 $n!$ 的高阶无穷大.

(2). $x^x >> a^x >> x^\alpha >> (\ln x)^m$，$x>0, x\in R$，$x$充分大.

证(1)(1°)：∵ $0<\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{n}\times\frac{2}{n}\times\frac{3}{n}\times\cdots\times\frac{n}{n}<\frac{1}{n}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}0=0=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}$，

∴ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$ 即 $n^n>>n!$ 但是 $(n^n)^{\frac{1}{n}}$ 与 $(n!)^{\frac{1}{n}}$ 却是同级无穷大。

∵ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e \Leftrightarrow n\sim e\sqrt[n]{n!}$ $(n\to\infty)$.

证(1)(2°)：∵ $0<\frac{a^n}{n!}=\left(\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{3}\cdots\frac{a}{m}\right)\frac{a}{m+1}\cdots\frac{a}{n}$，设 $1<a\le m$ 且 $\frac{a^m}{m!}=k$，

则 $0<\frac{a^n}{n!}<k\cdot\frac{a}{n}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}0=0=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{ka}{n}$，∴ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$.

证(1)(3°)：先设 $\alpha\in N^*$，$a=1+\lambda$ 则 $\lambda>0$，$a^n=(1+\lambda)^n>C_n^{\alpha+1}\lambda^{\alpha+1}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-\alpha)}{(\alpha+1)!}\lambda^{\alpha+1}$

$0<\frac{n^\alpha}{a^n}<\frac{n^\alpha}{C_n^{\alpha+1}\lambda^{\alpha+1}}=\frac{n^\alpha(\alpha+1)!}{n(n-1)(n-2)\cdots(n-\alpha)\lambda^{\alpha+1}}\xrightarrow{n\to\infty}0$ （分母次数高于分子的）

∴ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{a^n}=0$，再设 $m-1\le\alpha<m$，$m\in N^*$，则 $\frac{n^{m-1}}{a^n}\le\frac{n^\alpha}{a^n}<\frac{n^m}{a^n}$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{m-1}}{a^n}=0=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^m}{a^n}$，∴ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{a^n}=0$.

(2).

证(1)/(40) 先证 $m=1$ 时，对 $\forall m>0$，等学过洛必达法则再证。

令 $n^\alpha=y$，则 $n\to\infty$ 时，$y\to+\infty$．且，$\dfrac{\ln n}{n^\alpha}=\dfrac{\ln n^\alpha}{n^\alpha}\cdot\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{\ln y}{y}$，

且 $\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{\ln y}{y}=0$，理由如下：设 $k\leq y<k+1$，$k\in N^*$，则

$\ln k\leq \ln y<\ln(k+1)\Rightarrow \dfrac{\ln k}{k+1}<\dfrac{\ln y}{y}<\dfrac{\ln(k+1)}{k}$

且 $\dfrac{\ln k}{k+1}=\dfrac{k}{k+1}\cdot\dfrac{\ln k}{k}=\dfrac{k}{k+1}\ln\sqrt[k]{k}\longrightarrow 1\times\ln 1=0\ (k\to\infty)$；

$\dfrac{\ln(k+1)}{k}=\dfrac{k+1}{k}\cdot\dfrac{\ln(k+1)}{k+1}=\dfrac{k+1}{k}\ln\sqrt[k+1]{k+1}\longrightarrow 1\times\ln 1=0,\ (k\to\infty)$.

$\therefore \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\ln y}{y}=0\Leftrightarrow\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{\ln y}{y}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^\alpha}=0$.

证(2)/(10) 设 $n\leq x<n+1$，$n\in N^*$ 则 $\begin{cases} n^n\leq x^x<(n+1)^{n+1} \\ a^n\leq a^x<a^{n+1}\end{cases}\Rightarrow$

$\dfrac{a^n}{(n+1)^{n+1}}<\dfrac{a^x}{x^x}<\dfrac{a^{n+1}}{n^n}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{n+1}}{n^n}=a\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n^n}=a\times0=0=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{(n+1)^{n+1}}$

又 $n\to\infty\Leftrightarrow x\to+\infty$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^x}{x^x}=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{x^x}=0$；

证(2)/(20) 设 $n\leq x<n+1$，$n\in N^*$ 则 $\dfrac{n^\alpha}{a^{n+1}}<\dfrac{x^\alpha}{a^x}<\dfrac{(n+1)^\alpha}{a^n}$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\alpha}{a^{n+1}}=\dfrac{1}{a}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\alpha}{a^n}=\dfrac{1}{a}\times0=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^\alpha}{a^n}=a\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^\alpha}{a^{n+1}}=a\times0$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^\alpha}{a^x}=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\alpha}{a^x}=0$.

证(2)/(30)：设 $n\leq x<n+1$，$n\in N^*$ 则 $\dfrac{\ln n}{(n+1)^\alpha}<\dfrac{\ln x}{x^\alpha}<\dfrac{\ln(n+1)}{n^\alpha}$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{(n+1)^\alpha}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}\cdot\frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha}=0\times1=0=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{n^\alpha}$.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0$.

(三) 证明：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$，(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1$，(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$，(5) $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$ $(a>0,a\neq1)$，(6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$，$(\alpha\neq0)$，(7) $\lim\limits_{x\to0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$，(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x-5}{x^2+6}\right)^{4x}=e^{12}$.

注：上述例(1)～(6)今后可作为公式使用，并且可记为：当 $x\to0$ 时，

(1) $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$；(2) $\arcsin x\sim x$，(3) $\ln(1+x)\sim x$；(4) $e^x-1\sim x$；

(5) $a^x-1\sim x\ln a$；(6) $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$.

(四) 作业：EX1.3：4；9(1),(2)；10(1),(2),(4)；11(1),(2).

(五) 布下讲：函数的连续性及等价无穷小(大)

(2024.9.23)

(4).

第6讲：函数极限习题课附件：

(一) "有极限的函数的五性"（设x_0是常数）

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a\in R$；$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b\in R$，则

(1). $f(x)$在x_0处的极限a是唯一存在的；（可用反证法证明）

(2). $f(x)$在x_0的附近是有界的：$\exists M>0$，使$|f(x)|\le M$，$\forall x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$.

(3). 保号性：若$f(x)\ge 0$，$\forall x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$，$\delta>0$，则必有$a\ge 0$.（反证法）

(4). 保序性：若$f(x)\ge g(x)$，$\forall x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$，$\delta>0$，则必有$a\ge b$.

(5). 公式性：$\exists \delta>0$，使$f(x)=a+\alpha(x)$，$\forall x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$，且$\alpha(x)\to 0$ $(x\to x_0)$.

证(2)：从 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a \Rightarrow \forall \varepsilon>0$ $\exists \delta>0$，对$\forall x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$，$|f(x)-a|<\varepsilon$.

$\Rightarrow |f(x)|=|f(x)-a+a|\le |f(x)-a|+|a|<\varepsilon+|a|$. 取$M=\varepsilon+|a|$，则对$\forall x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$

$|f(x)|\le M$ 恒成立. 因此，有极限的函数必局部有界。

证(4)：令$h(x)=f(x)-g(x)$，$x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$，则 $h(x)\ge 0$，$\forall x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$.

且 $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)-\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=a-b$，结合(3).

有 $a-b\ge 0$ 即 $a\ge b$.

附(1).

证(5)：令 $\alpha(x)=f(x)-a$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-a)$

$=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)-\lim\limits_{x\to x_0}a=a-a=0\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，对 $\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$

有 $|\alpha(x)-0|<\varepsilon$ 即 $\alpha(x)\to 0\ (x\to x_0)$，即有极限的函数 $f(x)$

可用形式表示：$f(x)=a+\alpha(x)$，$\alpha(x)\to 0$，$(x\to x_0)$.

(三). 有极限的函数的"四则运算"法则(关于极限的)：

(1). $\lim\limits_{x\to x_0}(c_1f(x)+c_2g(x))=c_1a+c_2b=c_1\lim\limits_{x\to x_0}f(x)+c_2\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$，$\forall c_1,c_2\in R$.

这条性质指出的函数极限是有"线性性质"，可推广到任意有限个在点 x_0 处有极限的函数。

(2). $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=a\cdot b=(\lim\limits_{x\to x_0}f(x))(\lim\limits_{x\to x_0}g(x))$，特别地，当

$f(x)\equiv g(x)$，$\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，有 $\lim\limits_{x\to x_0}f^2(x)=a^2=(\lim\limits_{x\to x_0}f(x))^2$，即

幂的极限等于极限的幂。

(3). $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{b}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$，$(b\neq 0)$.

证法同数列极限的"四则运算法则"，只证(1)，当 $|c_1|+|c_2|>0$

时，从 $f(x)\to a\ (x\to x_0)\Rightarrow\forall\varepsilon>0$ ①，$\exists\delta_1>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，

则(2).

有 $|f(x)-a|<\frac{\varepsilon}{|c_1|+|c_2|}$；以 $g(x)\to b\ (x\to x_0)\Rightarrow$ 对 $\forall \varepsilon>0$，

$\exists \delta_2>0$，且 $\delta_2<\delta_1$，当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时，$|g(x)-b|<\frac{\varepsilon}{|c_1|+|c_2|}\Rightarrow$

$|c_1f(x)+c_2g(x)-(c_1a+c_2b)|\le|c_1||f(x)-a|+|c_2||g(x)-b|$

$<|c_1|\frac{\varepsilon}{|c_1|+|c_2|}+|c_2|\frac{\varepsilon}{|c_1|+|c_2|}=\varepsilon$. $\therefore \lim\limits_{x\to x_0}(c_1f(x)+c_2g(x))=c_1a+c_2b$.

(三) 证明：第3个重要极限：(设 $m,n\in N^*$，a_i,b_i 为常数且 $a_0\cdot b_0\neq 0$).

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}0, & 当 n<m,\\ \frac{a_0}{b_0}, & 当 n=m,\\ \infty, & 当 n>m.\end{cases}$$

证(1) 当 $n=m$ 时. 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots+b_{n-1}x+b_n}$

分子分母同时除以 x^n $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{a_n}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\frac{b_2}{x^2}+\cdots+\frac{b_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{b_n}{x^n}}=\frac{a_0+0+0+\cdots+0}{b_0+0+0+\cdots+0}=\frac{a_0}{b_0}$.

证(2). 当 $n<m$ 时. 原式的分子分母同时除以 x 的最高次幂 x^m,

原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{a_0}{x^{m-n}}+\frac{a_1}{x^{m-(n-1)}}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{x^{m-1}}+\frac{a_n}{x^m}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\frac{b_2}{x^2}+\cdots+\frac{b_{m-1}}{x^{m-1}}+\frac{b_m}{x^m}}=\frac{0+0+\cdots+0}{b_0+0+0+\cdots+0}=0$.

证(3) 当 $n>m$ 时. 由(2)知：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}=0$.

故 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\infty$.

附(3).

(四). 第(三)题的参考解法:

证(三)/(1): $\because 1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$, $\therefore \lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\times(\frac{x}{2})^2}$
$=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\times1^2=\frac{1}{2}$.

证(三)/(2). 正弦函数 $y=\sin x$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 中严增, 从而有反函数: $y=\arcsin x$, 其中 $-\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$, $|x|\le1$, 即 $|\arcsin x|\le\frac{\pi}{2}$, 且从 $y=\arcsin x\Longleftrightarrow x=\sin y$, 因此在(2)中, 若令 $\arcsin x=y$, 则有 $x=\sin y$, 且 $x\to0\Longleftrightarrow y\to0$. 即有:

$$\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}\xlongequal{令\arcsin x=y}\lim_{y\to0}\frac{y}{\sin y}=\lim_{y\to0}\frac{1}{\frac{\sin y}{y}}=\frac{1}{1}=1.$$

证(三)/(3): 因为对数函数 $\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 中连续, 从而对 $\forall x_0\in(0,+\infty)$, 有 $\lim\limits_{x\to x_0}\ln x=\ln(\lim\limits_{x\to x_0}x)=\ln x_0$.

故 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln(\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}})=\ln e=1$.

证(三)/(4): 令 $e^x-1=u$, 则 $x\to0$ 时, $u\to0$ 且 $x=\ln(u+1)$,

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}\xlongequal{令e^x-1=u}\lim_{u\to0}\frac{u}{\ln(u+1)}=\lim_{u\to0}\frac{1}{\frac{\ln(1+u)}{u}}=\frac{1}{1}=1.$$

陈付田.

证(三)/(5)：$\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\right)\ln a\ \underset{\text{则}\,x\to0\Leftrightarrow u\to0}{\overset{\text{令}\,x\ln a=u}{=\!=\!=\!=}}$

$\ln a\cdot\lim\limits_{u\to0}\frac{e^u-1}{u}=(\ln a)\cdot1=\ln a.\ (\forall a>0,a\neq1).$

证(三)/(6)：$\because\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\cdot\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}$

$\overset{\alpha\ln(1+x)=u}{=\!=\!=}\left(\lim\limits_{u\to0}\frac{e^u-1}{u}\right)\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}\right)=1\cdot\alpha\cdot1=\alpha.\ (\forall\alpha\neq0).$

证(三)/(7)：若 $\alpha(x)>0$ 恒成立，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=a>0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=b\in R$，

则必有：$\lim\limits_{x\to x_0}(\alpha(x))^{\beta(x)}=a^b=\left(\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)}$.

证：$\because(\alpha(x))^{\beta(x)}=e^{\beta(x)\ln\alpha(x)}$，$\therefore\lim\limits_{x\to x_0}(\alpha(x))^{\beta(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)\ln\alpha(x)}$

$=e^{\left(\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)\right)\left(\lim\limits_{x\to x_0}\ln\alpha(x)\right)}=e^{\left(\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)\right)\left(\ln\left(\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)\right)\right)}=\left(\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)}$

$=a^b.$

(5) $\lim\limits_{x\to0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$ 为"1^∞"型，可尝试用重要极限求解.

原式$=\lim\limits_{x\to0^+}\left((1+(\cos\sqrt{x}-1))^{\frac{1}{\cos\sqrt{x}-1}}\right)^{\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}}$

且 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-2\left(\sin\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2}{4\times\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2}=-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}{\frac{\sqrt{x}}{2}}\right)^2=-\frac{1}{2}\times1=-\frac{1}{2}$，

故原式$=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

附(5).

记(三)(8)：$\because \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-5}{x^2+6}=\frac{1}{1}=1$，$4x\to\infty$，$(x\to\infty)$

即(8)是"1^{∞}"型的待定型或称为"不定型"．可尝试用

公式：$\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$ 来解决。

$\because \left(\frac{x^2+3x-5}{x^2+6}\right)^{4x}=\left(\frac{(x^2+6)+(3x-11)}{x^2+6}\right)^{4x}=\left(\left(1+\frac{3x-11}{x^2+6}\right)^{\frac{x^2+6}{3x-11}}\right)^{\frac{(3x-11)4x}{x^2+6}}$

且 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3x-11)4x}{x^2+6}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x^2-44x}{x^2+6}=\frac{12}{1}=12$，

$\therefore$ 原式 $=e^{12}$．

注：若 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)\to 0$，$\beta(x)\to 0$ 且 $\beta(x)\neq 0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，

则称 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价的无穷小量，记作：

$\alpha(x)\sim\beta(x)\ (x\to x_0)$，或 $\beta(x)\sim\alpha(x)\ (x\to x_0)$．由(三)的

(1)—(6) 可知，有：(1). $1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}\ (x\to 0)$；(2). $\arcsin x\sim x\ (x\to 0)$；

(3). $\ln(1+x)\sim x\ (x\to 0)$；(4). $e^x-1\sim x\ (x\to 0)$；(5). $a^x-1\sim(\ln a)x\ (x\to 0)$；

(6). $(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x\ (x\to 0)$．($\forall a>0, a\neq 1$；$\forall\alpha\neq 0$)．

P10(6)．