

目录

1 数列极限	1
1.1 几个常用的记号	1
1.2 微积分或数学分析必须建立在实数系上 R 上	1
1.3 数列极限的科学定义	2
1.4 极限存在的两个常用准则	3
2 数列极限的性质与应用	4
2.1 复习数列极限的线性性质	4
2.2 数列极限的“四性”	4
2.3 收敛数列极限的四则运算法则	5
2.4 例题	5
3 数列极限习题课	6
3.1 习题	6
3.2 关于无穷大	6
3.3 Stolz 定理及其应用	6
3.4 例题	7
4 实数集连续性的五个等价命题	8
4.1 五个等价命题	8
4.2 Stolz 定理的证明	8
4.3 例题	8
4.4 函数极限 24 种科学定义	8
5 函数极限 24 种	10
5.1 数列 $\{a_n\}$ 极限 4 种科学定义	10
5.2 函数极限的“ $\varepsilon - \delta$ ”定义法	10
5.3 函数极限的四则运算法则	10
5.4 3 个重要极限及其证明	11
6 函数极限习题课	11
6.1 几个基本概念	11
6.2 无穷大的大小	12
6.3 例题	12

1 数列极限

1.1 几个常用的记号

1. $\forall \leftarrow A \leftarrow any$: 任意给定的一个; 给定后为常数
2. $\exists \leftarrow E \leftarrow exist$: 存在一个; 通常不唯一
3. $\sup E$: 数集 E 的最小上界, 即 E 的上确界 (supremum)

$\sup E$ 同时满足两条件:

- (a) $\forall x \in E, x \leq \sup E$;
- (b) $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in E, \sup E - \varepsilon < x_0$.

4. $\inf E$: 数集 E 的最大下界, 即 E 的下确界 (infimum)

$\inf E$ 同时满足两条件:

- (a) $\forall x \in E, x \geq \inf E$;
- (b) $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in E, x_0 < \inf E + \varepsilon$.

例 1.1. 设 $E = \{1, 3, 5, 8\}$, $F = (-\sqrt{3}, \pi]$, 则:

$\sup E = 8, \inf E = 1, \sup F = \pi, \inf F = -\sqrt{3}$. 且有

1. $\sup E = -\inf(-E)$;
2. $\inf F = -\sup(-F)$;

注记. 这里的 $-E$ 表示 E 的相反数集合, 即 $-E = \{-e : e \in E\}$.

1.2 微积分或数学分析必须建立在实数系上 R 上

理由: 极限运算时微积分的最基本运算, 而有理数集合 Q 关于极限运算时不封闭的. 例如: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e; \forall n \in N, (1 + \frac{1}{n}) \in Q$, 但 $e \notin Q$.

又如, $\forall n \in N, a_n = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m^2} \in Q$, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\pi^2}{6} \notin Q$.

实数集合 R 在数轴上的点是连续不断的, 且关于极限运算时封闭的. 因此, 实数集 R 是具有连续性. 实数集 R 的连续性也称为实数集的完备性.

描述实数集 R 连续性的公理通常有五个:

1. 确界存在原理;

2. 单调有界极限存在准则;
3. 极限存在的柯西 (Cauchy) 准则;
4. 闭区间套定理;
5. 列紧性原理, 即有界数列必有收敛子列定理.

这五个公理是互相等价的, 本课程采用”确界存在原理”作为实数集 R 连续性的公理.

注记. 这五条公理与课本 1.1.3 的连续性公理是等价的, 即任意一个公理都可以推导出另外四个公理. 因此这里说这五个等价命题描述了 R 的连续性.

公理 1.2. 确界存在原理

有上 (下) 界的非空实数集 E 必有上 (下) 确界 $\sup E(\inf E)$.

1.3 数列极限的科学定义

设数列 $\{a_n\}$ 以常数 a 为极限, 科学的定义如下:

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N$ 都有 $|a_n - a| < \varepsilon$ 成立, 则 $\{a_n\}$ 以常数 a 为极限, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 或 $a_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$.

事实上, 所有的收敛的有理数列, 其极限点的全体即是实数集 R . 即实数集 R 是有理数列的极限值构成的.

注记. 1. Q 对极限是不封闭的; 2. 由 Q 组成的数列的极限可以是实数; 3. 由 Q 组成的数列的极限只能是实数; 4. 由 Q 组成的所有收敛数列, 他们的极限的集合, 恰好就是 R , 不多不少.

理由如下:

对 $\forall x \in R$, 设 x 的小数表示为: $x = a_0.a_1a_2a_3 \cdots$, 则有理数列: $a_0, a_0.a_1, a_0.a_1a_2, \cdots$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 其极限为 x . 若 x 是有理数, 则 $a_0.a_1a_2 \cdots a_n$ 是有限小数或循环小数, 若 x 是无理数, 则 $a_0.a_1a_2 \cdots a_n$ 是无限不循环小数, 则极限点 x 是无理数.

注记. 此处 $x = a_0.a_1a_2a_3 \cdots$, 其中每一个 a_i 都是一个数字, a_0 是整数部分, $a_1a_2a_3 \cdots$ 是小数部分. 比如, $x = 3.1415926 \cdots$, 那么 $a_0 = 3, a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 1, a_4 = 5, a_5 = 9, a_6 = 2, a_7 = 6, \cdots$.

可以由 $x = a_0.a_1a_2a_3 \cdots$ 构造出一个数列 $\tau_1 = a_0, \tau_2 = a_0.a_1, \tau_3 = a_0.a_1a_2, \cdots$, 说 x 为极限指的, 是 x 是数列 $\{\tau_n\}$ 的极限, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = x$.

都用 x 代指, 是因为我这里不能确定 x 是不是有限小数, 有理数还是无理数. 但是 x 是数列 $\{\tau_n\}$ 的极限是确定的.

1.4 极限存在的两个常用准则

1. 单调有界极限存在准则: 若数列 $\{a_n\}$ 单调增 (减) 且有上 (下) 界, 则 $\{a_n\}$ 收敛. 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup a_n$ ($\inf a_n$).

2. 夹逼准则 (即两边夹准则): 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 满足 $a_n \leq b_n \leq c_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.

证明. 单调增有界极限存在.

设数列 $\{a_n\}$ 单调增且有上界, 由确界存在定理, $\{a_n\}$ 有上确界. 令 $\sup a_n = \beta$, 则 β 是 $\{a_n\}$ 满足以下两点:

1. $\forall n \in N, a_n \leq \beta$;
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists a_{n_0} \in \{a_n\}, \beta - \varepsilon < a_{n_0}$.

又因为 $\{a_n\}$ 单调增, 故 $\forall n > n_0, a_n \leq a_{n_0} > \beta - \varepsilon$, 且 $a_n \geq \beta < \beta + \varepsilon$. 即 $|\beta - a_n| < \varepsilon$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \beta$. \square

证明. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in N^*, \forall n > N, |a_n - a| < \varepsilon$. 又 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in N^*, \forall n > N, |c_n - a| < \varepsilon$.

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则 $\forall n > N, a_n \leq b_n \leq c_n$, 故 $a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon$. 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$. \square

例 1.3. 下列 a, b, q, c_1, c_2 皆为常数).

1. 设 $|q| < 1$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} aq^n = 0$;
2. 设 $a > 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$;
3. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$;
4. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_1 a_n + c_2 b_n) = c_1 a + c_2 b$. 即线性组合的极限等于极限的线性组合, 称此为极限的线性性质.

数列的极限具有线性性质, 同理函数极限也是具有线性性质的, 统称为极限的线性性质. 由极限的线性性质, 可导出微积分中绝大多数概念也具有线性性质. 如函数的导数、导数、微分、积分, 都具有线性性质.

作业. ex1.2. 1(2)(4); 3; 4; 5; 6; 8(5); 15(1); 19.

2 数列极限的性质与应用

2.1 复习数列极限的线性性质

设 a, b, c_1, c_2 为常数且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_1 a_n + c_2 b_n) = c_1 a + c_2 b = c_1 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + c_2 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

从上述极限的线性性质, 不难得到以下结论:

1. 当 $c_1 = c_2 = 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$;
2. 当 $c_1 = 1, c_2 = -1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$;
3. 当 $c_1 = k, c_2 = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} k a_n = k \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
4. 数列的线性性质可推广到任意有限个收敛数列的情形: 设 $a_{1n} \rightarrow a_1, a_{2n} \rightarrow a_2, \dots, a_{mn} \rightarrow a_m$, 且 $a_1, a_2, \dots, a_m, c_1, c_2, \dots, c_m$ 为常数, 则

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} (c_1 a_{1n} + c_2 a_{2n} + \dots + c_m a_{mn}) \\ &= c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_m a_m \\ &= c_1 \lim_{n \rightarrow \infty} a_{1n} + c_2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} + \dots + c_m \lim_{n \rightarrow \infty} a_{mn} \end{aligned}$$

2.2 数列极限的“四性”

1. 有界性: 若 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 有界, 反之未必;
2. 唯一性: 若 $\{a_n\}$ 收敛, 则其极限唯一;
3. 保号性: 若 $\{a_n\}$ 收敛且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a_n \geq 0, \forall n \geq n_0$, 则必有 $a \geq 0$;
4. 保序性: 若 $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$, 且 $a_n \leq (\geq) b_n, \forall n \geq n_0$, 则必有 $a \leq (\geq) b$.

2.3 收敛数列极限的四则运算法则

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n},$ 其中 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0.$

证明. 仅证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b} (b \neq 0), n \rightarrow \infty$

$$\text{注意到 } \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b||b_n|}$$

不妨设 $b > 0$, 即 $\exists N_1, \forall n > N_1, s.t. b_n > b - \varepsilon$ (a)

取 $\varepsilon < \frac{b}{2}$, 则 $b_n > b - \varepsilon \stackrel{(a)}{=} \frac{b}{2}$ (b)

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_2, \forall n > N_2, |b_n - b| < \varepsilon$ (c)

$$\text{得 } \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b||b_n|} \stackrel{(b)}{<} \frac{|b_n - b|}{b \frac{b}{2}} \stackrel{(c)}{<} \frac{\varepsilon}{\frac{b^2}{2}}$$

□

2.4 例题

例 2.1. 设 $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n, n \in N^*$, 证明:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e \approx 2.7182818128;$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{x})^x, x \in R$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e, x \in R$

例 2.2. 证明闭区间套定理: 若 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一列闭区间, 满足 $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}], n = 1, 2, \dots$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$, 则存在唯一的实数 ξ , 使得 $\xi \in [a_n, b_n], n = 1, 2, \dots$.

注记. 闭区间套定理, 是刻画实数集 R 的连续性的五个等价公理之一.

为了纪念数学家 Euler(欧拉) 在其中的贡献, 将 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ 记为 e . 经计算可知, $e \approx 2.718281828$. 讲义中还证明了 e 是一个无理数, 且将以 e 为底的对数称为自然对数, 记为 $\ln x$, 即 $\ln x = \log_e x$.

作业. ex1.2: 14;15(3)(4);16;18(3);22(2)(4);CH1:3(2).

3 数列极限习题课

3.1 习题

$$1. \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, n \in N^*.$$

$$2. \left(\frac{1}{n+1}\right) < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \left(\frac{1}{n}\right), n \in N^*.$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}, \text{ 即 } \sqrt[n]{n!}e \sim n.$$

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n, n \in N^*, \text{ 证明:}$$

1. $\{a_n\}$ 收敛;

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} = \ln 2;$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n+1} + \cdots + \frac{1}{3n+2n} = \ln \frac{5}{3};$$

$$4. 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \sim \ln n.$$

3.2 关于无穷大

$$1. \{a_n\} \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in N^*, \forall n > N, a_n > M.$$

$$2. \{a_n\} \rightarrow -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in N^*, \forall n > N, a_n < -M.$$

$$3. \{a_n\} \rightarrow \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in N^*, \forall n > N, |a_n| > M.$$

3.3 Stolz 定理及其应用

定理 3.1 (Stolz 定理). 设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是两个数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = A$$

, 其中 A 可以是有限数, 也可以是 $\pm\infty$; $\{b_n\}$ 是严格单调递增且趋于 $+\infty$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}.$$

注记. 完整的利用 *Stolz* 定理的过程要求先证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = A$ 极限存在并求得 A , 然后再利用 *Stolz* 定理求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$. 不过不严谨的直接写出 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$ 也是能接受的.

注记 3.2. 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \infty$ 时, *Stolz* 定理不一定成立. 反例可取 $a_n = (-1)^n, b_n = n$.

3.4 例题

例 3.3. 证明:

1. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$;
2. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \geq 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$.
3. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

例 3.4. 设 a_1, a_2, \cdots, a_m 是 m 个常数, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_1|^n + |a_2|^n + \cdots + |a_m|^n} = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_m|\}.$$

例 3.5. 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n^2} = \frac{1}{2}$;

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3} = \frac{1}{3}$;

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3}{n^4} = \frac{1}{4}$.

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$.

定理 3.6. 常用的平均值不等式:

设 a_1, a_2, \cdots, a_n 是 n 个正数, 则有:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

4 实数集连续性的五个等价命题

4.1 五个等价命题

1. 确界存在原理: 有上(下)界的非空实数集 E 必有上(下)确界 $\sup E(\inf E)$.
2. 单调有界极限存在准则: 若数列 $\{a_n\}$ 单调增(减)且有上(下)界, 则 $\{a_n\}$ 收敛. 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup a_n(\inf a_n)$.
3. 闭区间套定理: 若 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一列闭区间, 满足 $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}], n = 1, 2, \dots$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$, 则存在唯一的实数 ξ , 使得 $\xi \in [a_n, b_n], n = 1, 2, \dots$.
4. 列紧性原理: 若 $\{a_n\}$ 有界且含无穷多项, 则 $\{a_n\}$ 必有收敛子列 $\{a_{n_k}\}$.
5. 柯西 (Cauchy) 准则: 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是: 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n, m > N, |a_n - a_m| < \varepsilon$.

例 4.1. 证明确界原理推连续性.

由 $Y \neq \emptyset$, 故 X 有上界,

由确界原理, X 有上确界, 同理 Y 有下确界, 记 $c_1 = \sup X, c_2 = \inf Y$, (目标: 找到 $c, s.t. \forall a \in X, b \in Y, a \leq c \leq b$)

若 $c_1 \in X$, 则取 $c = c_1$.

若 $c_1 \notin X$, 则 $c_1 \in Y, c_2 \in Y \Rightarrow c = c_2; c_2 \notin Y \Rightarrow c_2 \in X, c_2 < c_1$ 这与 $\forall x \in X, y \in Y, x < y$ 矛盾.

4.2 Stolz 定理的证明

4.3 例题

例 4.2. 收敛的数列 $\{a_n\}$ 被称为 "Cauchy 列" 或 "基本列".

1. 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}^*$, 证明 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 列;
2. 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$, 证明 $\{a_n\}$ 不是 Cauchy 列.

4.4 函数极限 24 种科学定义

设 x_0 为常数

\Rightarrow 表示"则有...", 在此处在 \Leftrightarrow 的子语句之中.

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$
4. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$
5. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) > M.$
6. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) > M.$
7. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M.$
8. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) < -M.$
9. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) < -M.$
10. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M.$
11. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x)| > M.$
12. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x)| > M.$
13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X_0 > 0, \forall x > X_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$
14. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X_0 > 0, \forall x < -X_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$
15. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X_0 > 0, \forall |x| > X_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$
16. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall x > X_0 \Rightarrow f(x) > M.$
17. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall x > X_0 \Rightarrow f(x) < -M.$
18. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall |x| > X_0 \Rightarrow |f(x)| > M.$
19. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall x < -X_0 \Rightarrow f(x) > M.$
20. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall x < -X_0 \Rightarrow f(x) < -M.$
21. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall |x| > X_0 \Rightarrow |f(x)| > M.$
22. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall |x| > X_0 \Rightarrow f(x) > M.$
23. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall |x| > X_0 \Rightarrow f(x) < -M.$
24. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall |x| > X_0 \Rightarrow |f(x)| > M.$

5 函数极限 24 种

5.1 数列 $\{a_n\}$ 极限 4 种科学定义

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N, |a_n - a| < \varepsilon.$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N, a_n > M.$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N, a_n < -M.$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N, |a_n| > M.$

例 5.1. $\forall k \in \mathbb{N}^*$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = +\infty.$

5.2 函数极限的 “ $\varepsilon - \delta$ ” 定义法

定义 5.2. 设 x_0 为常数, 函数在 x_0 处的极限为 a 定义为:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

若 x 从大于 x_0 的一侧趋近于 x_0 , 则称为 x_0 的右极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$; 若 x 从小于 x_0 的一侧趋近于 x_0 , 则称为 x_0 的左极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$

定理 5.3. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x).$ (x_0 为常数)

定理 5.4. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$

例 5.5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e.$

5.3 函数极限的四则运算法则

定理 5.6. 设 x_0, a, b, c_1, c_2 为常数, 令 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$, 则:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} (c_1 f(x) + c_2 g(x)) = c_1 a + c_2 b;$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = a \cdot b$; 特别地, $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = a^2;$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b} (b \neq 0).$

注记 5.7. 函数极限: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in \mathbb{R}$ 也是有 “四性”, 即局部有界性, 唯一性, 保号性, 保序性.

注记 5.8. 局部有界性的证明: 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 I , 点 $x_0 \in I$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon \Leftrightarrow |f(x)| < |a| + \varepsilon$. 因此, 函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有界, 但 $f(x)$ 在整个定义域 I 内未必有界.

5.4 3 个重要极限及其证明

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e;$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & n = m; \\ 0, & n < m; \\ \infty, & n > m. \end{cases}$$

作业. ex1.3:1(2)(3);2(2)(4);3(2);5(1)(2);9(3)(4);10(3);CH1:13.

6 函数极限习题课

6.1 几个基本概念

(1) 以零为极限的变量称为无穷小量; 绝对值无限增大的变量称无穷大量. 常数中只有零是无穷小量, 非零无穷小与无穷大具有倒数关系.

例 6.1. $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x, x^m (m > 0), \tan x, e^x - 1, 1 - \cos x$ 都是无穷小量;

$n \in \mathbb{N}^*, n \rightarrow \infty$ 时, $n^n, n!, a^n (a > 1), n^\alpha (\alpha > 0), \ln n$ 都是无穷大量.

(2) 若函数 $f(x)$ 在 x_0 处有定义, 且 $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 若 $f(x)$ 在区间 I 上每一点都连续, 则称 $f(x)$ 在 I 上连续. 当 $f(x)$ 在 x_0 处连续时, 有 $f(x_0) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, 即连续函数的极限与函数值可以交换次序.

(3) 幂 (x^α, α 为常量), 指数 ($a^x, a > 0$), 三角函数 ($\sin x, \cos x, \tan x$), 对数函数 ($\log_a x, a > 0, a \neq 1$), 指数函数 (e^x), 反三角函数 ($\arcsin x, \arccos x, \arctan x$), 双曲函数 ($\sinh x, \cosh x, \tanh x$) 等函数在其定义域内均连续.

一切基本初等函数, 在其定义域内均连续.

6.2 无穷大的大小

例 6.2. 设 a, α, m 为常数, 且 $a > 1, \alpha > 0, m > 0$, 证明:

1. $n^n \gg n! \gg a^n \gg n^\alpha \gg (\ln n)^m$, 在 $n \rightarrow \infty, n \in N^*$ 时成立; 其中 $n^n \gg n! \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$, 称为 n^n 是 $n!$ 的高阶无穷大.
2. $x^x \gg a^x \gg x^\alpha \gg (\ln x)^m$, 在 $x \rightarrow +\infty, x > 0, x \in R$ 时成立.

6.3 例题

例 6.3. 证明:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$;
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$;
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$;
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$;
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, a > 0, a \neq 1$.
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \alpha \neq 0$.
7. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 3x - 5}{x^2 + 6} \right)^{4x} = e^{12}$.

注记. 上述例 1 ~ 6 今后可作为公式直接使用, 并可记为: 当 $x \rightarrow 0$ 时,

1. $\frac{1 - \cos x}{x^2} \sim \frac{1}{2}$;
2. $\arcsin x \sim x$;
3. $\ln(1+x) \sim x$;
4. $l^x - 1 \sim x$;
5. $a^x - 1 \sim \ln a \cdot x$;
6. $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot x$.

作业. ex1.3:4;9(1)(2);10(1)(2)(4);11(1)(2).