# 1 极限与连续

## 1.1 数列极限

## 1.2 函数极限

**例 1.1.** 求 $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\tan\frac{\pi}{2}x}$

## 1.3 连续

## 1.4 练习

**例 1.2.** 讲义第 4 题

设 $a_0=\dfrac{1}{2}, a_{n+1}=a_n(2-a_n), n\in\mathbb{N}$, 证明 $\{a_n\}$ 收敛并求其极限.

**例 1.3.** 讲义第 12 题

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sqrt[3]{n^3+n^2}-n\right\}$.

**例 1.4.** 讲义第 18 题

已知 $a_n=n\sin(2\pi n!e)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

**例 1.5.** 讲义第 22 题 (2)

若 $p$ 为大于 1 的正整数, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+p}-a_n=\lambda$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}$.

**例 1.6.** 讲义第 25 题

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-e^{2x}+2\sin x}{x+\ln(1-x)}$.

# 2 单变量微分学

## 2.1 导数的概念

**例 2.1.** 讲义例 2

设 $f(x)$ 可导, 说明是否有以下命题的充分性与必要性:

$$f(0)=0\Leftrightarrow F(x)\text{在}x=0\text{处可导}$$

**例 2.2.** 讲义例 3

设对任意 $x$ 都有 $f(x+1)=f^2(x)$, 且 $f(0)=f'(0)=1$, 求 $f'(1)$.

**例 2.3.** 讲义例 4

已知 $f''(0)$ 存在,$f(0)=f'(0)=0$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}$.

## 2.2 注意一些结论

## 2.3 讨论函数的可导性

**例 2.4.** 讲义第 1 题

设 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 讨论下列函数在 $x=0$ 处的可导性:

$(1) f(x)=x\varphi(x)$.

$(2) f(x)=|x|\varphi(x)$.

**例 2.5.** 讲义第 2 题

求 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$ 在 $x=1$ 的不可导点的个数.

## 2.4 导数, 微分的几何意义

**例 2.6.** 讲义第 3 题

设 $y=f(x)$ 具有二阶导数, 且 $f'(x),f''(x)>0,\Delta x$ 为自变量 $x$ 在 $x_0$ 的有限增量,$\Delta y$ 与 $dy$ 分别为 $f(x)$ 在 $x_0$ 处对应的增量与微分, 若 $\Delta x>0$, 则 $0,dy,\Delta y$ 的大小关系应该是是什么?

## 2.5 函数求高阶导

注意隐函数求导.

## 2.6 用导数研究函数的性质

**例 2.7.** 讲义例 5

设 $f(x)$ 满足 $f''(x)+(1+x^2)f'(x)+x^3f(x)=\sin x$, 且 $f'(0)=0$, 则 (　　)

$A.f(0)$ 为 $f(x)$ 的极小值

$B.f(0)$ 为 $f(x)$ 的极大值

$C.f'(0)$ 为 $f'(x)$ 的极大值

$D.(0,f(0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点

**例 2.8.** 讲义例 7

曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的其中一个拐点为 (　　)

$A.(1,0)$ $B.(2,0)$ $C.(3,0)$ $D.(4,0)$

**例 2.9.** 讲义例 10

证明曲线 $f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1$ 与 $x$ 轴在区间 $(0,1)$ 上有唯一交点, 记为 $(x_n,0)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

**例 2.10.** 讲义例 12

$B(x)=(x^2-1)^n$, 求证 $B^{(n)}(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有 $n$ 个不同的实根.

## 2.7 不等式证明

## 2.8 证明关于 $\xi$ 的等式 (不等式)

## 2.9 Tayler 公式

**例 2.11.** 讲义例 2

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数,$f'(a)=f'(b)=0$, 证明存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$|f''(\xi)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

**例 2.12.** 讲义例 6

函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有三阶导数, 且 $f(-1)=0, f(1)=1, f'(0)=0$, 证明存在 $\xi\in(-1,1)$, 使得 $f'''(\xi)=3$.

## 2.10 求极限的方法

**例 2.13.** 讲义经典错误解法

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内二阶可到, 且 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}\right)=0$. 试求 (1) $f(0)$, (2) $f'(0), f''(0)$, (3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+3}{x^2}$.

## 2.11 练习

**例 2.14.** 三.5

$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有二阶导数, 且 $f(x)|\leq1, f'(0)>1$, 证明存在 $\xi$, 使得 $f''(\xi)+f(\xi)=0$.

**例 2.15.** 三.6

设 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$, 证明:

(2) 存在 $x_0 \in R$, 使得 $|f'(x_0)| < 1$, 且 $|f'(x)| \leq |f'(x_0)|, \forall x \in R$.

(3) 设 $a \in R, x_1 = a, x_{n+1} = f(x_n), n = 1, 2, \cdots$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

**例 2.16.** 三.9

函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某个邻域内有三阶连续导数,$f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = -1$, 设 $a_{n+1} = f(a_n), n = 0, 1, 2, \cdots$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n^2$.