第5讲：函数极限24种

(一) 数列$\{a_n\}$极限4种的严格定义：

(1). $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\in R \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N\in N^*$，对$\forall n>N$，$|a_n-a|<\varepsilon$；

(2). $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists N\in N^*$，对$\forall n>N$，$a_n>M$；

(3). $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists N\in N^*$，对$\forall n>N$，$a_n<-M$；

(4). $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists N\in N^*$，对$\forall n>N$，$|a_n|>M$.

例1. 对$\forall k\in N^*$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}n^k=+\infty$.

证：对$\forall M>0$，要使$n^k>M$ 只需$n>\sqrt[k]{M}$，取$N=[\sqrt[k]{M}]+1$，则对$\forall n>N$，有$n>\sqrt[k]{M}\Leftrightarrow n^k>M$恒成立. $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}n^k=+\infty$.

(二) 设x_0为常数，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a\in R$的$\varepsilon-\delta$定义法：

$\forall\varepsilon>0$，若$\exists\delta>0$，对$\forall\ 0<|x-x_0|<\delta$，$|f(x)-a|<\varepsilon$恒成立.

若x从大于x_0的方向趋于x_0时，$f(x)$以常数a为极限，则记作

$f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，当$x_0<x<x_0+\delta$时，$|f(x)-a|<\varepsilon$.

若x从小于x_0的方向趋于x_0时，$f(x)$以a为极限，则记作

$f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，$|f(x)-a|<\varepsilon$.

以上称 $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ 分别称为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左、右极限。

Th1：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\in\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x_0-0)=A=f(x_0+0)$，（$x_0$ 为常数）

证"$\Rightarrow$"已知 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\in\mathbb{R} \Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，对 $\forall\ 0<|x-x_0|<\delta$，$|f(x)-A|<\varepsilon$.

即对 $\forall\ 0<x-x_0<\delta$ 即 $x_0<x<x_0+\delta$ 有 $|f(x)-A|<\varepsilon \Rightarrow f(x_0+0)=A$；又对

$\forall\ -\delta<x-x_0<0$ 即 $x_0-\delta<x<x_0$，也有 $|f(x)-A|<\varepsilon \Rightarrow f(x_0-0)=A$，故

$f(x_0-0)=A=f(x_0+0)$.

证"$\Leftarrow$"已知 $f(x_0+0)=A \Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta_1>0$，当 $x_0<x<x_0+\delta_1$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$；

又 $f(x_0-0)=A \Rightarrow$ 对上述 $\varepsilon>0, \exists\delta_2>0$，当 $x_0-\delta_2<x<x_0$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$，

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $x_0<x<x_0+\delta$ 或 $x_0-\delta<x<x_0$ 即 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，

总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$. $\therefore$ 即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

Th2：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

证：令 $x=\frac{1}{t}$，则 $x\to\infty \Leftrightarrow t\to0$，$x\to+\infty \Leftrightarrow t\to0^+$；$x\to-\infty \Leftrightarrow t\to0^-$

且 $A=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{t\to0}f(\frac{1}{t}) \Leftrightarrow \lim\limits_{t\to0^+}f(\frac{1}{t})=A=\lim\limits_{t\to0^-}f(\frac{1}{t})$.

所以 $A=\lim\limits_{t\to0^+}f(\frac{1}{t})\xlongequal{x=\frac{1}{t}}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$；$A=\lim\limits_{t\to0^-}f(\frac{1}{t})\xlongequal{x=\frac{1}{t}}\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

故 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$. 即 $f(\infty)=A\Leftrightarrow\begin{cases}f(+\infty)=A\\f(-\infty)=A\end{cases}$

例2. 利用 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e=\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$.

三) 函数极限的四则运算法则（设 x_0, a, b, c_1, c_2 为常数）.

令 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b$，则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}(c_1f(x)+c_2g(x))=c_1a+c_2b=(\lim\limits_{x\to x_0}f(x))c_1+(\lim\limits_{x\to x_0}g(x))c_2$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=a\cdot b=(\lim\limits_{x\to x_0}f(x))(\lim\limits_{x\to x_0}g(x))$，特别地，当 $f(x)=g(x)$ 时，

$\lim\limits_{x\to x_0}f^2(x)=a^2=(\lim\limits_{x\to x_0}f(x))^2$，即平方的极限等于极限的平方。

(3). $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{b}\quad(b\neq0)$.

证(1)：当 $c_1=c_2=0$ 时，结论显然成立，当 $|c_1|+|c_2|>0$ 时，∵ $f(x)\to a$

$g(x)\to b\ (x\to x_0)\Rightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_1>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，$|f(x)-a|<\frac{\varepsilon}{|c_1|+|c_2|}$，

$\exists\delta_2>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时，$|g(x)-b|<\frac{\varepsilon}{|c_1|+|c_2|}$，取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则 $\delta>0$

且当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|c_1f(x)+c_2g(x)-(c_1a+c_2b)|\leq|c_1||f(x)-a|+|c_2||g(x)-b|$

$< |c_1|\frac{\varepsilon}{|c_1|+|c_2|}+|c_2|\frac{\varepsilon}{|c_1|+|c_2|}=\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}(c_1 f(x)+c_2 g(x))=c_1a+c_2b$.

证(2)：$\because |f(x)g(x)-ab|\le|f(x)g(x)-g(x)a|+|g(x)a-ab|=|g(x)||f(x)-a|+|a||g(x)-b|$

又 $\because f(x)\to a\ (x\to x_0)\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0$，当 x：$0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，$|f(x)-a|<\varepsilon$；

又 $\because g(x)\to b\ (x\to x_0)$．对上述 $\varepsilon>0$，$\exists\delta_2>0$，当 x：$0<|x-x_0|<\delta_2$ 时．$|g(x)-b|<\varepsilon$.

$\Rightarrow|g(x)|\le|g(x)-b|+|b|<\varepsilon+|b|$．令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 x：$0<|x-x_0|<\delta$ 时．

$|f(x)g(x)-ab|<(\varepsilon+|b|)\varepsilon+|a|\varepsilon=(|a|+|b|+\varepsilon)\varepsilon\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=a\cdot b$.

推广：当 $f_k(x)\to a_k\in\mathbb{R}$，$k=1,2,3,\cdots,m$．$(x\to x_0)$ 时．有：

$\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x)=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_m=(\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x))(\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x))\cdots(\lim\limits_{x\to x_0}f_m(x))$

特别地，当 $f_1(x)\equiv f_2(x)\equiv f_3(x)\equiv\cdots\equiv f_m(x)$ 时，$a_1=a_2=\cdots=a_m$．则有：

$\lim\limits_{x\to x_0}(f_1(x))^m=a_1^m=(\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x))^m$，$\forall m\in\mathbb{N}^*$.

函数极限：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a\in\mathbb{R}$ 也具有"四性"，即局部有界性、唯一性、保序性、保号性：

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I，点 $x_0\in I$．且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a\in\mathbb{R}$.

对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时．$|f(x)-a|<\varepsilon$．$\Rightarrow|f(x)|\le|f(x)-a|+|a|$

$<\varepsilon+|a|$，令 $M=\varepsilon+|a|$，则 $M>0$，且在点 x_0 的局部：$0<|x-x_0|<\delta$，

恒有 $|f(x)|\le M$ 成立。因此，函数 $f(x)$ 在 x_0 的局部范围：$0<|x-x_0|<\delta$

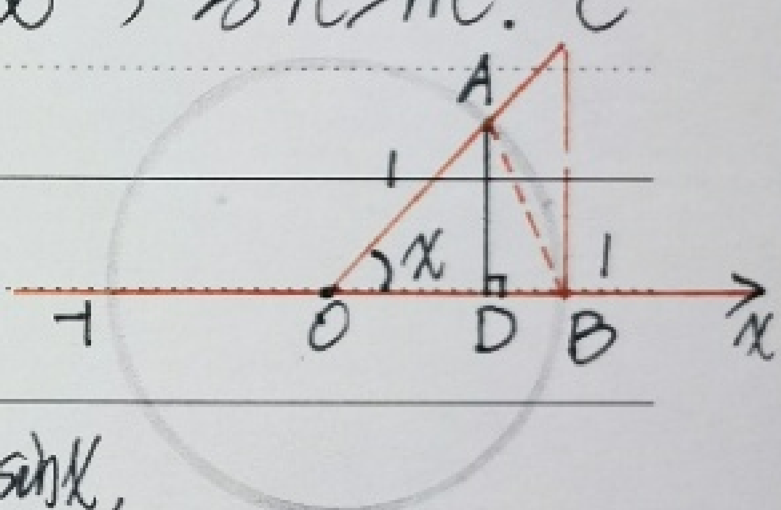
是有界的。但 $f(x)$ 在整个定义域 I 上未必有界！

(四). 3个重要极限及其证明：

(1). $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$； (2). $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e\approx2.718281828$.

(3). $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}0，& 当 m>n；\\ a_0/b_0，& 当 m=n；(b_0\ne0)\\ \infty，& 当 n>m.\end{cases}$

证(1)：先证 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1$，



$\because x\to0^+$，不妨设 $0<x<\frac{\pi}{2}$，

在右图的单位圆中，$\triangle AOB$ 的面积 $=\frac{1}{2}\times1\times\sin x$，

显然扇形 AOB 的面积 $=\frac{1}{2}\times1^2\times x>\frac{1}{2}\sin x$，而 $\triangle OCB$ 的面积

$=\frac{1}{2}OB\cdot BC=\frac{1}{2}\times1\tan x>$ 扇形 AOB 面积 $>\triangle AOB$ 面积，即：

$\frac{1}{2}\tan x>\frac{1}{2}\times1^2x>\frac{1}{2}\sin x$.（$0<x<\frac{\pi}{2}$），同除以 $\sin x$：

$\frac{1}{\cos x}>\frac{x}{\sin x}>1\iff1<\frac{\sin x}{x}<\cos x$. 且

$\lim\limits_{x\to0^+}1=1=\lim\limits_{x\to0^+}\cos x$，依函数极限的夹逼准则：

有 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1$.

再证 $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sin x}{x}=1$.

令 $t=-x$，则 $x<0$ 时 $t>0$，且 $x\to0^-\Leftrightarrow t\to0^+$. 从而

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x}{x}\overset{t=-x}{=\!=\!=}\lim_{t\to0^+}\frac{\sin(-t)}{-t}=\lim_{t\to0^+}\frac{\sin t}{t}=1.$$

综上可知，$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$.

证(e)：先证 $x\to+\infty$ 时，有 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$.

对 $\forall x>1$，$\exists n\in N^*$，使 $n<x\leq n+1\Leftrightarrow\frac{1}{n+1}\leq\frac{1}{x}<\frac{1}{n}\Rightarrow$

$(1+\frac{1}{n+1})^x\leq(1+\frac{1}{x})^x<(1+\frac{1}{n})^x$，利用 $n<x\leq n+1$，有：

$(1+\frac{1}{n+1})^n<(1+\frac{1}{x})^x<(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n})$

$=e\cdot1=e$，$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n+1})}=\frac{e}{1}=e$，

依函数极限的夹逼准则：$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$，而从

$n<x\leq n+1$ 可知，$n\to\infty\Leftrightarrow x\to+\infty$. 故 $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$；

而对 $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x$，只需设 $y=-x$，则 $x\to-\infty$ 时，$y\to+\infty$.

且 $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x\overset{y=-x}{=\!=\!=}\lim\limits_{y\to+\infty}(1+\frac{1}{-y})^{-y}=\lim\limits_{y\to+\infty}(1+\frac{1}{y-1})^y\overset{y-1=t}{=\!=\!=}$

$\lim\limits_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t})^{t+1}=\lim\limits_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t})^t(1+\frac{1}{t})=e\cdot1=e$.

综上，有 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$.

证(3)：(1) 当 $m>n$ 时，分子分母各项同除以最高次幂 x^m，则(3)

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^{n-m}+a_1x^{n-m-1}+a_2x^{n-m-2}+\cdots+a_{n-1}x^{1-m}+a_nx^{-m}}{b_0+b_1x^{-1}+b_2x^{-2}+\cdots+b_{m-1}x^{1-m}+b_mx^{-m}}=\frac{a_0\cdot0+a_1\cdot0+a_2\cdot0+\cdots+a_{n-1}\cdot0+a_n\cdot0}{b_0+b_1\cdot0+b_2\cdot0+\cdots+b_{m-1}\cdot0+b_m\cdot0}$$

$=\frac{0}{b_0}=0$；

(2) 当 $m=n$ 时，分子分母各项同除以最高次幂 $x^n=x^m$，则(3)

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0\cdot1+a_1x^{-1}+a_2x^{-2}+\cdots+a_{n-1}x^{1-n}+a_nx^{-n}}{b_0\cdot1+b_1x^{-1}+b_2x^{-2}+\cdots+b_{n-1}x^{1-n}+b_nx^{-n}}=\frac{a_0+0+0+\cdots+0}{b_0+0+0+\cdots+0}=\frac{a_0}{b_0};$$

(3) 从(1)可知，当 $n>m$ 时，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}=0$，

$$\Longleftrightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\infty.$$

从今以后，以上三个重要极限都可作为公式使用！

五、作业：ex1.3：

1/(2),(3)；2/(2),(4)；3/(2)；5/(1),(2)；9/(3),(4)；10/(3)；ch1练/13.

六、第6讲：函数极限习题课（2024.9.20）