数分B1第五次习题课

2024.11.2

回顾：

1. 导函数无一类间断

（精细表述：$f(x)$ $[x_0, x_0+\delta]$ 连续 $(x_0, x_0+\delta)$ 可导

若 $\lim_{x\to x_0^+} f'(x) = l$ 则 $f'_+(x_0)$ 存在且为 l）

证明：$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi) \to \lim_{x\to x_0^+} f'(x)$

2. 导函数的介值性

（精细表述：$f(x)$ $[a,b]$ 可导 则 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 之间任何值 λ

$\exists \xi \in [a,b]$ s.t. $f'(\xi) = \lambda$ ）

证明：special case：$f'(a) < 0 < f'(b)$

此时 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内部 x_0 处取最小值 $f'(x_0) = 0$

general case：$f'(a) < \gamma < f'(b) \xrightarrow[g(x)=f(x)-\gamma x]{\text{扰动}} g'(a) < 0 < g'(b)$ ）

3. 洛必达

① $\frac{0}{0}$：f, g 在 x_0 附近可导，$g'(x_0) \neq 0$，$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$

若 $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$，则 $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

证明：$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} \overset{\text{Cauchy}}{=} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

② $\frac{\infty}{\infty}$ f, g 在 x_0 附近可导 $g'(x_0) \neq 0$ 且 $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$

若 $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ 则 $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$

作业(上次作业比较少，也比较容易，只列举洛必达计算题)

3.4.1 (12) $\lim\limits_{x\to1^-}\ln x\ln(1-x)$

Sol $x\to1^-$时 $\ln x\to0$. $\ln(1-x)\to\infty$ $0\cdot\infty$型 化为$\frac{0}{\frac{1}{\infty}}=\frac{0}{0}$型.

$$\lim_{x\to1^-}\ln x\ln(1-x)=\lim_{x\to1^-}\frac{\ln x}{\frac{1}{\ln(1-x)}}$$

$$\overset{洛}{=}\lim_{x\to1^-}\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{\ln^2(1-x)(x-1)}\right)^{-1}=\lim_{x\to1^-}-\frac{(x-1)\ln^2(1-x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to1^-}-\frac{\ln^2(1-x)}{\frac{1}{x-1}}\overset{洛}{=}\lim_{x\to1^-}(x-1)^2\cdot2\ln(1-x)\frac{1}{x-1}$$

$$=2\lim_{x\to1^-}(x-1)\ln(1-x)=0$$

(13) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{2x-\pi}$

Sol $x\to\frac{\pi}{2}$时 $\tan x\to\infty$ $2x-\pi\to0$ ∞^0型 $\infty^0=e^{0\ln\infty}\Rightarrow0\cdot\infty$型

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{2x-\pi}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(2x-\pi)\ln\tan x}$$

$$指数=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln\tan x}{\frac{1}{2x-\pi}}\overset{洛}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{1}{\tan x}\frac{1}{\cos^2x}}{\frac{-2}{(2x-\pi)^2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{(2x-\pi)^2}{-\sin2x}$$

$$=\lim_{x\to\pi^-}\frac{(x-\pi)^2}{-\sin x}\overset{洛}{=}\lim_{x\to\pi^-}\frac{2(x-\pi)}{-\cos x}=0$$ 故原极限为1

(14) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$

Sol $x\to0$时 $\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\to1$ $\frac{1}{x}\to\infty$ 1^∞型 $1^\infty=e^{\infty\ln1}\Rightarrow0\cdot\infty$型

$$原式=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right]}$$

$$指数=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\overset{洛}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x+1}-1}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{-x}{2x(x+1)}=-\frac{1}{2}$$

故原极限为$e^{-\frac{1}{2}}$

(15) $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\ln(1-x)+\tan\frac{\pi}{2}x}{\cot\pi x}$

Sol. $x\to1^-$ 时 分子 $\to\infty$ 分母 $\to\infty$

原式 $=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\ln(1-x)}{\cot\pi x}+\dfrac{\sin\frac{\pi x}{2}\sin\pi x}{\cos\frac{\pi x}{2}\cos\pi x}$

$=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\ln(1-x)}{\cot\pi x}+\dfrac{2\sin^2\frac{\pi x}{2}}{1-2\sin^2\frac{\pi x}{2}}$

$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\ln(1-x)}{\cot\pi x}\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\frac{1}{x-1}}{-\pi\frac{1}{\sin^2\pi x}}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\sin^2\pi x}{\pi(1-x)}\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2\pi\sin\pi x\cos\pi x}{-\pi}$

$=0$

$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2\sin^2\frac{\pi x}{2}}{1-2\sin^2\frac{\pi x}{2}}=-2$ 故原式 $=-2$

补充题:

一. 中值定理相关

1. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可导 $f(0)=0$ 且 $|f'(x)|\le|f(x)|$ $(\forall x\in[0,1])$

求证: $f\equiv0$ 于 $[0,1]$

Pf. 法一 $|f(x)|$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上有最大值 $|f(x_0)|$. $x_0\in[0,\frac{1}{2}]$

由中值定理 $\exists\eta\in(0,x_0)$ s.t. $\dfrac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=\dfrac{f(x_0)}{x_0}=f'(\eta)$

故 $2|f(x_0)|\le\left|\dfrac{f(x_0)}{x_0}\right|=|f'(\eta)|\le|f(\eta)|\le|f(x_0)|$

故 $|f(x_0)|=0\Rightarrow f\equiv0$ 于 $[0,\frac{1}{2}]$. 同理 $f\equiv0$ 于 $[\frac{1}{2},1]$

法二 $g(x)=(e^{-x}f(x))^2$

$g'(x)=2e^{-x}f(x)\,e^{-x}(f'(x)-f(x))=2e^{-2x}(f(x)f'(x)-f^2(x))\le0$

$\Rightarrow g(x)\le g(0)=0$ 但 $g(x)\ge0$ $\Rightarrow g\equiv0$ $\Rightarrow f\equiv0$ #

2 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续 且除有限个点$\{x_1 \cdots x_k\}$外 $f'(x)>0$

则f在$[a,b]$上严格单增

Pf. $[a,b]=[a,x_1]\cup[x_1,x_2]\cup\cdots[x_k,b]$

在每个小区间内 $\forall x<y$ $\exists \xi\in(x,y)$ s.t $f(y)-f(x)=(y-x)f'(\xi)>0$

故只须证$\forall x_i$处严格单增即可

任取x_i和$x_0<x_i$ 若$f(x_0)\geq f(x_i)$ 由f在(x_0,x_i)严格单增

取$y\in(x_0,x_i)$ 则$f(y)>f(x_0)\geq f(x_i)$

则$\forall z\in(y,x_i)$ $f(z)>f(y)$ 令$z\to x_i$ 有$\lim\limits_{x\to x_i^-}f(x)\geq f(y)>f(x_i)$

但f连续 故$\lim\limits_{x\to x_i^-}f(x)=f(x_i)$ 矛盾! 故$f(x_0)<f(x_i)$

同理$\forall x_0>x_i$ 有$f(x_i)<f(x_0)$ 故得证 #

3 f在$[0,1]$可导 $f(0)=1$ $f(1)=\frac{1}{2}$ 则$\exists\xi\in(0,1)$ s.t. $f^2(\xi)+f'(\xi)=0$

Pf. ① 若f无零点 令$g(x)=x-\frac{1}{f(x)}$ $g(0)=g(1)=-1$

则$\exists\xi\in(0,1)$ s.t $g'(\xi)=1+\frac{f'(\xi)}{f^2(\xi)}=0 \Rightarrow f^2(\xi)+f'(\xi)=0$

② 若f有唯一零点ξ 则f的最小值$f(x_0)=0$ 否则

若$f(x_0)<0$ 由介值性 $(0,x_0)$ $(x_0,1)$各有一个零点 矛盾

则ξ为唯一零点且最小值点 $\Rightarrow f(\xi)=f'(\xi)=0 \Rightarrow f^2(\xi)+f'(\xi)=0$

③ f有2个及以上零点 $E=\{x\in[0,1]\mid f(x)=0\}\subset(0,1)$ $a=\inf E$ $b=\sup E$

则$\forall n$ $\exists x_n\in E\cap[a,a+\frac{1}{n})$ 则 $\underset{f(x_n)=0}{x_n\to a}$ $\Rightarrow f(a)=0$ 同理$f(b)=0$

且 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^-}\frac{f(x)}{x-a}\leq 0$ 同理$f'(b)\geq 0$

若 $f'(a)=0$ 则$f^2(a)+f'(a)=0$ 对b同理

故下设$f'(a)<0$ $f'(b)>0$

$f'(a)<0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{x-a}<0 \Rightarrow \exists\delta>0$ s.t. $f(x)<0$ $(a<x<a+\delta)$

令$\bar{a}=\inf\{x\mid f(x)=0,\ a+\delta<x<b\}$

定义 $F(x)=x-\frac{1}{f(x)}$ $(x\in(a,\bar{a}))$. 则 $\lim\limits_{x\to a^+}F(x)=\lim\limits_{x\to \bar{a}^-}F(x)=-\infty$

故 $\exists\,\xi\in(a\ \bar{a})$ 为 F 的最大值点. $\Rightarrow F'(\xi)=0 \Rightarrow f^2(\xi)+f'(\xi)=0$

二 洛必达相关

1. $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 可导. 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+xf'(x)\ln x)=1$ 则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$

pf. Attempt: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)g(x)}{g(x)}\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)g'(x)+f'(x)g(x)}{g'(x)}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+f'(x)\frac{g(x)}{g'(x)}\right)$$

观察到取 $g(x)=\ln x$ 即可 #

2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{(a+x)^x-a^x}{x^2}$

Sol ① $x\to0$ 时. $(a+x)^x-a^x\to1-1=0$

故原式 $\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{(a+x)^x\left(\ln(a+x)+\frac{x}{a+x}\right)-a^x\ln a}{2x}$

$$\overset{洛}{=}\lim_{x\to0}\frac{(a+x)^x\left(\left(\ln(a+x)+\frac{x}{a+x}\right)^2+\frac{2a+x}{(a+x)^2}\right)-a^x(\ln a)^2}{2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2a+x}{2(a+x)^2}=\frac{1}{a}$$

② 原式 $=\lim\limits_{x\to0}a^x\frac{(1+\frac{x}{a})^x-1}{x^2}$ $\left((1+\frac{x}{a})^x-1=e^{x\ln(1+\frac{x}{a})}-1\sim x\ln(1+\frac{x}{a})\right)$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\ln(1+\frac{x}{a})}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{a}}{x}=\frac{1}{a}$$

若能用等价无穷小 则尽量使用 简化计算!

洛必达是最笨的方法

三.关于无穷小量

上次课上题：$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\cdots(1+\frac{n}{n^2}) \triangleq \lim\limits_{n\to\infty}A_n$

$\ln A_n = \ln(1+\frac{1}{n^2}) + \cdots + \ln(1+\frac{n}{n^2}) = \frac{n+1}{2n} + o(\frac{1}{n^2}) + \cdots o(\frac{n}{n^2})$

无穷个小o可相加？ $\sum\limits_{i=1}^{n} o(a_{n,i}) = o(\sum\limits_{i=1}^{n} a_{n,i})$ ？ (*)

更特别地：$\underbrace{o(\frac{1}{n}) + o(\frac{1}{n}) + \cdots o(\frac{1}{n})}_{a_{n,1}\ \cdots\ n个\ \cdots\ a_{n,n}} = o(1)$ ？

(*)严格写：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n,i}}{a_{n,i}} = 0\ (\forall i)$ 是否 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} b_{n,i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_{n,i}} = 0$ ？

尝试证明 or 证否。 在做题中一般认为这种相加成立！

回到原题：如果不用无穷小，可以用原始的 ε-N 这样写：

$f(x)=\ln(1+x)$ 由 Taylor 展开 $f(x) = f'(0)x + h(x)\cdot x$ 其中 $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$

则 $\forall \varepsilon > 0$ 取 N_1 s.t. $|h(x)| \le \frac{\varepsilon}{2}\ (\forall x \le \frac{1}{N_1})$。再令 $N_2 = \lceil \frac{f'(0)}{\varepsilon} \rceil$

$N = \max\{N_1, N_2\}$，则 $\forall n \ge N$

$$\left|\ln A_n - \frac{f'(0)}{2}\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n^2}) - \frac{f'(0)}{2}\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} f'(0)\frac{i}{n^2} + \sum_{i=1}^{n} h(\frac{i}{n^2})\frac{i}{n^2} - \frac{f'(0)}{2}\right|$$

$$\le \left|\frac{f'(0)}{2n}\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} h(\frac{i}{n^2})\frac{n}{n^2}\right| \le \left|\frac{f'(0)}{2n}\right| + \max_{i=1,\cdots,n}\left|h(\frac{i}{n^2})\right| < \varepsilon$$

例 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\frac{k}{n\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\sum_{k=1}^{n}\ln\cos\frac{k}{n\sqrt{n}}}$

$$\ln\cos x = \ln(1+\cos x-1) = \cos x-1-\frac{(\cos x-1)^2}{2}+o((\cos x-1)^3)$$
$$= -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)^2}{2}+o(x^6)$$
$$= -\frac{x^2}{2}-\frac{1}{12}x^4+o(x^6)$$
$$\Rightarrow \ln\cos\frac{k}{n\sqrt{n}} = -\frac{k^2}{2n^3}-\frac{k^4}{12n^6}+o\left(\frac{k^6}{n^9}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\ln\cos\frac{k}{n\sqrt{n}} = -\frac{1}{2}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}-\frac{\sum_{k=1}^{n}k^4}{12n^6}+o(\cdot\cdot)$$
$$\to -\frac{1}{6} \qquad \text{故 Ans} = e^{-\frac{1}{6}}$$

例. f在a处可导 $f(a)\neq 0$ 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n$

$$f(a+\tfrac{1}{n}) = f(a)+\tfrac{1}{n}f'(a)+o(\tfrac{1}{n})$$
$$\Rightarrow \frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}-1 = \frac{1}{n}\frac{f'(a)}{f(a)}+o(\tfrac{1}{n})$$

$$\ln\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)} = \ln\left(1+\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}-1\right) = \frac{1}{n}\frac{f'(a)}{f(a)}+o(\tfrac{1}{n})+o\left(\frac{1}{n}\frac{f'(a)}{f(a)}+o(\tfrac{1}{n})\right)$$
$$= \frac{1}{n}\frac{f'(a)}{f(a)}+o(\tfrac{1}{n})$$

$$\text{故 原式} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}}$$
$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f'(a)}{f(a)}+n\,o(\frac{1}{n})} = e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$$

$$\text{错解: 原式} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln f(a+\frac{1}{n})-\ln f(a)}{a+\frac{1}{n}-a}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(\ln f)'(\xi)}$$
$$= e^{(\ln f)'(a)} = e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$$

条件只给出a处可导. 无法用中值定理!

23年期中

一 证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\max\{a_n, b_n\} = c$

作业题，略

二.(1) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$

Ans $= \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = e^2$

(2) $0<k<1$ 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left((n+1)^k - n^k\right)$

Ans $= \lim\limits_{n\to\infty} k(n+\xi)^{k-1} = 0$

(3) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+x+x^2}-1}{\tan 2x}$

Ans $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{4}(x+x^2)}{2x} = \frac{1}{8}$

(4) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sin^4 x}$

Ans $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{x^4}{24}-1+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{8}x^4}{x^4} = -\frac{1}{12}$

(5) $\frac{a}{\pi}\notin\mathbb{Z}$ 求 $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$

Ans: $e^{\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln\sin x-\ln\sin a}{x-a}} = e^{\lim\limits_{x\to a}\cot\xi} = e^{\cot a}$

(6) 求 $\ln\cos x$ 带Peano余项的4阶Maclaurin级数

$y=\ln\cos x$ $y=0$ $y'=-\tan x=0$ $y''=-\frac{1}{\cos^2 x}=-1$ $y'''=\frac{-2\sin x}{\cos^3 x}=0$ $y^{(4)}=\frac{-2\cos^4 x+\sin x(\dots)}{\cos^6 x}=-2$

$\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)$

三 (1) $\begin{cases} x=t\cos t \\ y=t\sin t \end{cases}$ $(t\in[0,\pi])$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 处切线 $t=\frac{\pi}{2}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^{-1}=\frac{\sin t+t\cos t}{\cos t-t\sin t}=-\frac{2}{\pi}$ $\Rightarrow y=-\frac{2}{\pi}x+\frac{\pi}{2}$

(2) $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1 & x\geq 0 \\ a\sin x+b & x<0 \end{cases}$ a.b什么条件下 f连续/可导？

$f(0^-)=b$ $f(0^+)=1$ 故连续 $\Leftrightarrow b=1$

可导时求f在0处微分 $f'(0^-)=a$ $f'(0^+)=1$ 故可导 $\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$

此时微分 $df=dx$

四. $f(x)=\sin 2x-x$ $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 求f的最值，拐点。

$f'(x)=2\cos 2x-1$ f $[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}]\downarrow$ $[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]\uparrow$ $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]\downarrow$

$f(-\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$ $f(-\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ 最大值$\frac{\pi}{2}$ 最小$-\frac{\pi}{2}$ $f''(x)=-4\sin 2x$ $x=0$ 拐点

五. f 在 $[a,b]$ 连续 (a,b) 可导. 且 $f(a)f(b)>0$ $f(a)f(\frac{a+b}{2})<0$

则 $\exists \xi \in (a,b)$ s.t. $f'(\xi)=f(\xi)$

$g(x)=e^{-x}f(x)$ $g'(x)=e^{-x}(f'(x)-f(x))$

$f(a)f(\frac{a+b}{2})<0 \Rightarrow \exists \xi_1 \in (a,\frac{a+b}{2})\ f(\xi_1)=0$. $f(\frac{a+b}{2})f(b)<0 \Rightarrow \exists \xi_2 \in (\frac{a+b}{2}, b), f(\xi_2)=0$

$\Rightarrow g(\xi_1)=g(\xi_2)=0 \Rightarrow \exists \xi \in (\xi_1,\xi_2)$ s.t. $g'(\xi)=0 \Rightarrow f'(\xi)=f(\xi)$

六. f 在 $[a,b]$ 上定义 且 $\begin{cases} (a)\ \forall x\in[a,b]\ 有 f(x)\in[a,b] \\ (b)\ \exists k\in(0,1)\ \text{s.t.}\ \forall x,y\in[a,b]\ |f(x)-f(y)|\le k|x-y| \end{cases}$

则 (a) f 的不动点 x^* 存在唯一

(b) 任意的 $x_1\in[a,b]$ 构造 $x_{n+1}=f(x_n)$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$

(a) $f(a)-a\ge 0$ $f(b)-b\le 0$ 若其中有一个取等. 则有一个不动点.

否则 $\exists x^*\in(a,b)$ s.t. $f(x^*)-x^*=0 \Rightarrow x^*$ 为不动点,

若 x^*, x'^* 均为不动点. 则 $f(x^*)=x^*$. $f(x'^*)=x'^*$

$\Rightarrow |f(x^*)-f(x'^*)|=|x^*-x'^*|\le k|x^*-x'^*| \Rightarrow x^*=x'^*$ 故唯一

(b) $|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|\le k|x_n-x_{n-1}|\le\cdots\le k^{n-1}|x_2-x_1|$

$\Rightarrow |x_{n+m}-x_n|\le(k^{n-2}+\cdots k^{n+m-2})|x_2-x_1|\le\frac{k^{n-2}}{1-k}|x_1-x_2|\to 0$ 故 $\{x_n\}$ Cauchy

$x_n\to x_0$ 则 $\underset{x_{n+1}}{\overset{\parallel}{f(x_n)}}\to f(x_0)$ 由数列极限唯一性. $f(x_0)=x_0$

$x_{n+1}\to x_0$ $\Rightarrow x_0=x^*$.

七. f 在 $[0,1]$ 上二阶可导 $f(0)=f(1)$ $|f''(x)|\le 2$ $(\forall x\in[0,1])$

则 $|f'(x)|\le 1$ $(\forall x\in[0,1])$

$f(0)=f(x)-f'(x)x+\frac{f''(\xi_1)}{2}x^2$ $\xi_1\in(0,x)$

$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x)^2$ $\xi_2\in(x,1)$

$\Rightarrow |f'(x)|\le\left|\frac{f''(\xi_1)}{2}x^2-\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x)^2\right|$

$\le x^2+(1-x)^2 \le 1$

22年期中

一 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^{kx}=\frac{1}{e}$ 求 k

$\left(\frac{x-2}{x}\right)^{kx}=\left(1-\frac{2}{x}\right)^{kx}=\left(1+\frac{2}{-x}\right)^{-2k\cdot\frac{-x}{2}}=e^{-2k}\Rightarrow k=\frac{1}{2}$

(2) $\begin{cases}x=t\sin t+\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}$ $\frac{d^2y}{dx^2}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}=\frac{\cos t}{t\cos t}=\frac{1}{t}$ $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\frac{1}{t}=-\frac{1}{t^2}\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{t^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^{-1}=-\frac{1}{t^3\cos t}$

(3) $f(x)=\ln(\cos x)$ 的 Maclaurin 多项式 x^4 系数

同23年 二.(6)

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x+f(x)}{x^3}=0$ 则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x+f(x)}{x^3}=$

$f(x)=-\sin x+o(x^3)=-x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\Rightarrow\tan x+f(x)=\frac{1}{2}x^3+o(x^3)$ 故 Ans $=\frac{1}{2}$

(5) f 在 x_0 附近有反函数且二阶可导 $x\to x_0$ 时 $f(x)=1+2(x-x_0)+3(x-x_0)^2+o(x-x_0)^2$

则 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y_0=f(x_0)$ 处的二阶导为

$y'=2$ $y''=6$ $\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right)\frac{dx}{dy}=-\frac{y''}{y'^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{y'^3}=-\frac{3}{4}$

二 (1) f 在 x_0 可导 则 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=$ (B)

A. $f(x_0)$ B. $2f'(x_0)$ C. 0 D. $f''(x_0)$

(2) $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\frac{1}{x} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在0处

A. 无定义 B 连续不可导 C 不连续 D 连续可导

$f'(x)=\begin{cases}2x\cos\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{x} & x\neq0\\ x\cos\frac{1}{x} & x=0\end{cases}$ $f'(0)=0$ $x\to0$ 时 $f'(x)$ 不存在 $\Rightarrow$ (C)

(3) f 有连续二阶导数. $F(x)=f(\cos x)$ $F(x)$ 在 $x=0$ 极小的一个充分条件为

A. $f'(1)<0$ B $f'(1)>0$ C $f''(1)<0$ D $f''(1)>0$

$F'(x)=-\sin x\, f'(\cos x)$ $F''(x)=-\cos x\, f'(\cos x)+\sin^2x\, f''(\cos x)\Rightarrow F''(0)=-f'(1)$

(4) f 在0处连续 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x^2)}{x^2}=1$ 则

A. $f(0)=0$ $f'_-(0)=1$　　B. $f(0)=0$, $f'(0)=1$

C $f(0)=0$. $f'_+(0)=1$　　D. $f(0)=1$, $f'(0)=1$

若 $f(0)=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to0}\frac{f(x^2)}{x^2}=+\infty$ 矛盾 $\Rightarrow f(0)=0$　$f'_+(0)=\lim\limits_{u\to0^+}\frac{f(u)}{u}\xlongequal{u=x^2}\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x^2)}{x^2}=1 \Rightarrow (C)$

(5) $y(x)$ 由 $xe^{f(y)}=e^y\ln2022$ 决定. f 有二阶导 $f'(x)\neq1$

则 $dy=$

A. $\frac{dx}{x(1-f'(y))}$　B. $\frac{1}{x(1-f'(y))}$　C. $\frac{dx}{e^{f(y)}(1-f'(y))}$　D. $\frac{1}{e^{f(y)}(1-f'(y))}$

$xe^{f(y)}=e^y\ln2022 \overset{求导}{\Rightarrow} e^{f(y)}+xf'(y)y'(x)e^{f(y)}=e^y y'(x)\ln2022$

$\Rightarrow y'(x)=\frac{e^{f(y)}}{e^y\ln2022-xf'(y)e^{f(y)}}=\frac{e^{f(y)}}{xe^{f(y)}-xf'(y)e^{f(y)}}=\frac{1}{x(1-f'(y))} \Rightarrow (A)$

三.(1) 证: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$　作业,略

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}3a_n+b_n=7$. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n+2b_n=4$. 证 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 收敛并求极限

$a_n=\frac{2(3a_n+b_n)-(a_n+2b_n)}{5}\to2$　$b_n=\frac{3(a_n+2b_n)-(3a_n+b_n)}{5}\to1$

(3) e^{-x^2} 单调性. 凹凸区间

$f(x)=e^{-x^2}$　$f'(x)=-2xe^{-x^2}$　$f''(x)=(4x^2-2)e^{-x^2}$　$(-\infty,0)\uparrow$ $(0,+\infty)\downarrow$　$(-\infty,-\frac{\sqrt2}{2})(\frac{\sqrt2}{2},+\infty)$ 凸 $(-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2})$ 凹

(4) $a_n\to a$ 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots na_n}{n^2}$　作业,略

(5) $x_0=1$ $x_{n+1}=f(x_n)$. 其中 $f(x)=\frac{x+2}{x+1}$ 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 则 $x_{n+1}=f(x_n)$ 取极限 $\Rightarrow a=f(a)=1+\frac{1}{a+1}$ $\Rightarrow a=\sqrt2$ (负值舍去)

四 $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x} & x<0\\ 6 & x=0\\ \frac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\frac{x}{4}} & x>0\end{cases}$

$a=?$ 时 f 在0连续

$a=?$ 时 f 在0可去奇点、

$f(0^-)=\lim\limits_{x\to0}\frac{ax^3}{x-(x+\frac16x^3+o(x^3))}=-6a$　$f(0^+)=\lim\limits_{x\to0}\frac{(\frac12a^2+1)x^2}{\frac{x^2}{4}}=4+2a^2$

故连续 $\Leftrightarrow a=-1$　可去奇点 $\Leftrightarrow a=-2$

五 求 $k\arctan x - x = 0$ 的实根个数

$f(x) = k\arctan x - x$ $\quad f'(x) = \frac{k}{1+x^2} - 1 = \frac{k-1-x^2}{1+x^2}$

注意 f 奇函数 ⇒ 只考虑 $(0,+\infty)$.

(i) $k \le 1$ 则 $f'(x) < 0$ $(x \in (0,+\infty))$ 故 f 在 $(0,+\infty)$ 严格单减

又 $f(0) = 0$ 故 $(0,+\infty)$ 无零点. 此时只有一个零点 $x=0$

(ii) $k > 1$ 则 $f'(x)$ 在 $(0, \sqrt{k-1})$ 正 $(\sqrt{k-1}, +\infty)$ 负

即 $(0, \sqrt{k-1}) \uparrow$ $(\sqrt{k-1}, +\infty) \downarrow$ 又 $f(\frac{\pi k}{2}) \le k \cdot \frac{\pi}{2} - x = 0$

故在 $(\sqrt{k-1}, +\infty)$ 有个零点 x_0 则总共3个零点 $0, \pm x_0$

六. $y = f(x)$ 二阶可导. $f''(x) > 0$ $\quad f(0) = 0$ $\quad f'(0) = 0$ 求 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3 f(u)}{f(x)\sin^3 u}$

其中 $u = u(x)$ 为曲线 $y = f(x)$ 上点. $P = (x, f(x))$ 处切线在 x 轴上截距

切线 $Y = f'(x)(X - x) + f(x)$ ⇒ 截距 $u(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

$\lim\limits_{x\to 0} u(x) = -\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{f'(x)} = -\lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{f(x)}{x}}{\frac{f'(x)}{x}} = -\frac{f'(0)}{f''(0)} = 0$

[注意 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{f''(x)}$ 不一定存在(因为 f'' 不一定连续. $\lim\limits_{x\to 0} f''(x)$ 不一定存在)

故不能用洛必达!]

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{u}{x} = 1 - \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x f'(x)} = 1 - \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2} f''(0) + o(x^2)}{x f'(x)}$

$= 1 - \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2} \frac{f''(0)}{\frac{f'(x)}{x}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{f''(0)}{f''(0)} = \frac{1}{2}$

故 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3 f(u)}{f(x)\sin^3 u} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3 f(u)}{\frac{1}{8}x^3 f(x)} \cdot$ $= 8\lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{u^2}{2} f''(0) + o(x^2)}{\frac{x^2}{2} f''(0) + o(x^2)} = 1$

七. f 在 $[0,1]$ 二阶可导. $f(0) = f'(0)$ $\quad f(1) = f'(1)$. 则 ∃ $\xi \in (0,1)$ s.t. $f(\xi) = f''(\xi)$

作业. 略