第十讲：实数系连续性的五个等价命题（即实数理论）

(一) 五个等价命题：

(I). 确界存在定理：若数集 E 有上(下)界，则 E 必有上(下)确界；

(II). 单调有界极限存在准则：若数列 $\{a_n\}$ 单增(减) 且有上(下)界，则 $\{a_n\}$ 必收敛，即极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在；

(III). 闭区间套 Th：若 $\begin{cases} (1)\ [a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}],\ n=1,2,3,\cdots \\ (2)\ b_n-a_n\to 0\ (n\to\infty) \end{cases}$ 则存在唯一实数 $x_0\in[a_n,b_n]$，$n=1,2,3,\cdots$

(IV). 致密(列紧)性 Th：若 $\{a_n\}$ 有界且含无穷多项，则 $\{a_n\}$ 必有收敛的子列 $\{a_{n_k}\}$，其中 $1\le n_1<n_2<n_3<\cdots<n_k<\cdots$，$n_k\ge k$.

(V) Cauchy (柯西) 收敛准则：$\{a_n\}$ 收敛的充要条件为：

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}^*$，对 $\forall m>n>N$，$|a_m-a_n|<\varepsilon$ 恒成立。

证法：(I) $\Rightarrow$ (II) $\Rightarrow$ (III) $\Rightarrow$ (IV) $\Rightarrow$ (V) $\Rightarrow$ (III) $\Rightarrow$ (I)

证 (I) $\Rightarrow$ (II)：设 $\{a_n\}$ 单减但有下界 $m$：$a_n\ge m>m-\varepsilon$，$(\forall\varepsilon>0)$，$\forall n\in\mathbb{N}^*$ (1)

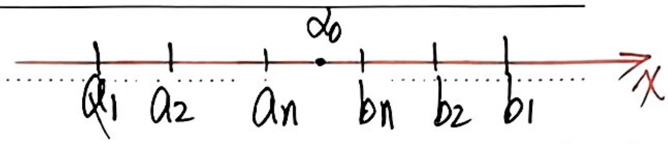
依(I)，$\{a_n\}$有下确界，令$\beta=\inf\{a_n\}$．则 $a_n\geq\beta>\beta-\varepsilon$．

且$\exists n_0\in N^*$ 使 $a_{n_0}<\beta+\varepsilon$．又$\{a_n\}$单减．对$\forall n>n_0\Rightarrow a_n\leq a_{n_0}$

故 $\beta-\varepsilon<\beta\leq a_n\leq a_{n_0}<\beta+\varepsilon\Leftrightarrow|a_n-\beta|<\varepsilon.\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\beta=\inf\{a_n\}$．

证(II)$\Rightarrow$(III)：$\because[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}]\Rightarrow\{a_n\}\uparrow$ 且有

上界$b_1$；$\{b_n\}$单减且有下界$a_1$．




依(II) $\{a_n\}$收敛，$\{b_n\}$收敛．令$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$．则$\begin{cases}a=\sup\{a_n\}\\ b=\inf\{b_n\}\end{cases}$

且 $b=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)+\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0+a=a$，令$a=b=\alpha_0$．则

$\alpha_0$唯一且 $a_n\leq a=\alpha_0=b\leq b_n$ 即 $\alpha_0\in[a_n,b_n]$，$n=1,2,3,\cdots$

证(III)$\Rightarrow$(IV)：$\because\{a_n\}$有界，可设$M>0$使$|a_n|\leq M$恒成立．

取$[\alpha_1,\beta_1]=[-M,M]$，则$[\alpha_1,\beta_1]$中含$\{a_n\}$的无穷多项，任取其中一项

设为$a_{n_1}$；二等分$[\alpha_1,\beta_1]=[\alpha_1,\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}]\cup[\frac{\alpha_1+\beta_1}{2},\beta_1]$，则两个子区间中必有

一个含$\{a_n\}$的无穷多项，记为$[\alpha_2,\beta_2]$，在$[\alpha_2,\beta_2]$中取$\{a_n\}$中的一项$a_{n_2}$

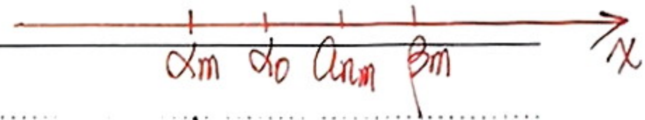
且$n_2>n_1$；二等分$[\alpha_2,\beta_2]=[\alpha_2,\frac{\alpha_2+\beta_2}{2}]\cup[\frac{\alpha_2+\beta_2}{2},\beta_2]$，两个子区间中含$\{a_n\}$

的无穷多项的那个记为$[\alpha_3,\beta_3]$．在$[\alpha_3,\beta_3]$中取$\{a_n\}$中的一项

$a_{n_3}$ 且 $n_3>n_2>n_1$，… 在 $[\alpha_m,\beta_m]$ 中任取 $\{a_n\}$ 中的一项 $a_{n_m}$，

且 $n_m>n_{m-1}>\cdots>n_3>n_2>n_1$. 则 $\begin{cases} ① [\alpha_m,\beta_m]\supset[\alpha_{m+1},\beta_{m+1}],\ m=1,2,3,\cdots \\ ② \beta_m-\alpha_m=\dfrac{M-(-M)}{2^{m-1}}\to 0\ (m\to\infty). \end{cases}$

由(III)存在唯一一个实数 $\alpha_0\in[\alpha_m,\beta_m]$，




利用：$0\le|a_{n_m}-\alpha_0|\le\beta_m-\alpha_m\to 0\ (m\to\infty)$ 及夹逼准则：

$\lim\limits_{m\to\infty}|a_{n_m}-\alpha_0|=0$ 即 $\lim\limits_{m\to\infty}a_{n_m}=\alpha_0$，即 $\{a_n\}$ 有收敛的子列 $\{a_{n_m}\}$. 且 $a_{n_m}\to\alpha_0\ (m\to\infty)$.

证(IV) $\Rightarrow$ (V)：先证Cauchy收敛准则的必要性：已知 $\{a_n\}$ 收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\in\mathbb{R}\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^*$，对 $\forall n>N$，$|a_n-a|<\varepsilon/2\Rightarrow$

对 $\forall m>n>N\Rightarrow|a_m-a|<\varepsilon/2$，$\Rightarrow|a_m-a_n|\le|a_m-a|+|a-a_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

再证充分性：已知对 $\forall\varepsilon_0>0$，$\exists n_0\in\mathbb{N}^*$，当 $m>n>n_0$ 时 $|a_m-a_n|<\varepsilon_0$ 成立。

取 $n=n_0+1$，当 $m>n=n_0+1>n_0$ 时，$|a_m-a_{n_0+1}|<\varepsilon_0/2$. $\Rightarrow$ 对 $\forall m>n_0+1$

$|a_m|\le|a_m-a_{n_0+1}|+|a_{n_0+1}|<\frac{\varepsilon_0}{2}+|a_{n_0+1}|$ 恒成立. 令 $\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_{n_0}|,|a_{n_0+1}|+\frac{\varepsilon_0}{2}\}$

$=M$. 则 $|a_m|\le M$，$\forall m\in\mathbb{N}^*$. 由(II) $\{a_n\}$ 有收敛的子列 $\{a_{n_k}\}$.

设 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=A\in\mathbb{R}$. 下证 $\{a_n\}$ 也收敛于 $A$。

对 $\forall m > n_k > n_0$ 有 $|a_m - a_{n_k}| < \varepsilon_0/2$ 令 $k \to \infty$，则

$|a_m - A| \le \varepsilon_0/2 < \varepsilon_0$ 即 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

(三) Stolz 定理的证明：

(1°) 设 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = A \in R$ 且 $b_n \uparrow +\infty$ (严)．则对 $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N^*$,

当 $n \ge n_0$ 时，$A - \varepsilon < \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} < A + \varepsilon$ 且 $b_n - b_{n-1} > 0 \Longrightarrow$

$(A-\varepsilon)(b_n - b_{n-1}) < a_n - a_{n-1} < (A+\varepsilon)(b_n - b_{n-1})$, $n = n_0, n_0+1, n_0+2, \cdots n-1, n$:

$(A-\varepsilon)(b_{n_0} - b_{n_0-1}) < a_{n_0} - a_{n_0-1} < (A+\varepsilon)(b_{n_0} - b_{n_0-1})$

$(A-\varepsilon)(b_{n_0+1} - b_{n_0}) < a_{n_0+1} - a_{n_0} < (A+\varepsilon)(b_{n_0+1} - b_{n_0})$

$(A-\varepsilon)(b_{n_0+2} - b_{n_0+1}) < a_{n_0+2} - a_{n_0+1} < (A+\varepsilon)(b_{n_0+2} - b_{n_0+1})$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$(A-\varepsilon)(b_n - b_{n-1}) < a_n - a_{n-1} < (A+\varepsilon)(b_n - b_{n-1})$

相加之得：(再同时除以 $b_n$)

$$\frac{(A-\varepsilon)(b_n - b_{n_0-1})}{b_n} < \frac{a_n - a_{n_0-1}}{b_n} < \frac{(A+\varepsilon)(b_n - b_{n_0-1})}{b_n} \Longleftrightarrow$$

$$-\varepsilon + \frac{a_{n_0-1} - (A-\varepsilon) b_{n_0-1}}{b_n} < \frac{a_n}{b_n} - A < \varepsilon + \frac{a_{n_0-1} - (A+\varepsilon) b_{n_0-1}}{b_n} \quad (*1)$$

从 $\frac{a_{n_0-1} - (A-\varepsilon) b_{n_0-1}}{b_n} \to 0$, $\frac{a_{n_0-1} - (A+\varepsilon) b_{n_0-1}}{b_n} \to 0 \ (n \to \infty)$，对上述 $\varepsilon > 0$

(4)

$\exists N\in N^*$，当 $n>N$ 时，$-\varepsilon<\dfrac{a_{n_0-1}-(A-\varepsilon)b_{n_0-1}}{b_n}$；$\dfrac{a_{n_0-1}-(A+\varepsilon)b_{n_0-1}}{b_n}<\varepsilon$

取 $N=\max\{n_0,N\}$ 且 $n>N$ 时，由(*)知

$-\varepsilon-\varepsilon<\dfrac{a_n}{b_n}-A<\varepsilon+\varepsilon \Leftrightarrow \left|\dfrac{a_n}{b_n}-A\right|<2\varepsilon$ 恒成立.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}}=A\in R$.

(2°) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}}=A=+\infty$ 且 $b_n\uparrow+\infty$ 则 $\dfrac{a_n-a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}}>1$ $(n>n_1)$ 恒成立. $\Rightarrow a_n-a_{n+1}>b_n-b_{n+1}>0$ 恒成立 $\Rightarrow\{a_n\}$ 单调(严). 且从

$$\begin{cases}a_{n_1}-a_{n_1-1}>b_{n_1}-b_{n_1-1}\\ a_{n_1+1}-a_{n_1}>b_{n_1+1}>b_{n_1}\\ a_{n_1+2}-a_{n_1+1}>b_{n_1+2}>b_{n_1+1}\\ \vdots\\ a_n-a_{n-1}>b_n>b_{n-1}\end{cases}$$

相加得：

$a_n-a_{n_1-1}>b_n-b_{n_1-1}\Rightarrow$

$a_n>b_n+(a_{n_1-1}-b_{n_1-1})\to+\infty\ (n\to\infty)$

即 $a_n\uparrow+\infty$(严)且

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n-b_{n+1}}{a_n-a_{n+1}}=\dfrac{1}{+\infty}=0^+$

依(1°)有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=0^+\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=+\infty=A$.

(3°) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}}=-\infty=A$. 可设 $c_n=-a_n$ 则

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c_n-c_{n+1}}{b_n-b_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-a_n+a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}}=-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}}=-(-\infty)=+\infty$ 依(2°)

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c_n}{b_n}=+\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-a_n}{b_n}=+\infty\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=-\infty=A$.

注：若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}}=\infty$ 则推不出 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\infty$，例设 $\begin{cases}a_n=(-1)^n n\\ b_n=n\end{cases}$.

则 $b_n\uparrow+\infty$(严)且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n n-(-1)^{n+1}(n+1)}{n-(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n(2n+1)}{-1}=\infty$，但

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 振荡发散，而非无穷大发散。

(三) 例题：

收敛的数列 $\{a_n\}$ 称为 "Cauchy列" 或 "基本列"。

(1) 设 $a_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$，$n\in N^*$，证明 $\{a_n\}$ 是Cauchy列；

(2) 设 $a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$，$n\in N^*$，证明 $\{a_n\}$ 不是Cauchy列。

证(1)，对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists n_0\in N^*$ 使 $\frac{1}{n_0}<\varepsilon$。对 $\forall m>n>n_0$ 有

$$|a_m-a_n| = \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{1}{(n+3)^2}+\cdots+\frac{1}{m^2} < \frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(m-1)m} = \frac{1}{n}-\frac{1}{m}$$

$< \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$。依Cauchy收敛准则，$\{a_n\}$ 是Cauchy列。

证(2)，对 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}>0$，对 $\forall N\in N^*$，取 $n>N$，$m=2n$，则 $m>n>N$ 而

$$|a_m-a_n| = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon_0$$ 依Cauchy收敛准则，$\{a_n\}$ 发散

即 $\{a_n\}$ 不是Cauchy列。

(四) 作业：

(1). Ex 1.2：17(2),(3),(4)；24；

(2) ch1 综合：3(1)；7；9；10(2)；11.

# 第4讲(续)

(一) 实数系连续性中(V)$\Rightarrow$(III)$\Rightarrow$(I)的证明:

证(V)$\Rightarrow$(III). 已知(V)成立, 即$\{a_n\}$收敛的充要条件是

$\forall \varepsilon>0, \exists n_0\in N^*$, 当$m>n>n_0$时, $|a_m-a_n|<\varepsilon$恒成立.

而(III)的已知条件是 $\begin{cases} (1).\ [a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}],\ n=1,2,3,\cdots \\ (2).\ b_n-a_n\to 0\ (n\to\infty). \end{cases}$

要证明存在实数$\alpha_0\in[a_n,b_n]$, $n=1,2,3,\cdots$

(1) 从 $b_n-a_n\to 0\ (n\to\infty) \Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists n_0\in N^*$, 当$n>n_0$时, $|b_n-a_n-0|<\varepsilon$

对$\forall m>n>n_0$, 由于$[a_{n_0},b_{n_0}]\supset[a_n,b_n]\supset[a_m,b_m] \Rightarrow$

$|a_m-a_n|\le|b_n-a_n|<\varepsilon$, 由Cauchy收敛准则,


$\{a_n\}$收敛. 令$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A\in R$. 由A是$\{a_n\}$的上确界知 $a_n\le A$,

又A是$\{b_n\}$的下确界, ∴ $A\le b_n \Rightarrow a_n\le A\le b_n$, $n=1,2,3,\cdots$

令$\alpha_0=A$, 则 $\alpha_0\in[a_n,b_n]$, $n=1,2,3,\cdots$

证(III)$\Rightarrow$(I). 设$E=\{a_n\}$, 则E是数集, 设E有上界M, 则

$a_n\le M$, $\forall n\in N^*$, 取$[\alpha_1,\beta_1]=[a_1,M]$, 则$[\alpha_1,\beta_1]$的右侧无E中点, 但$[\alpha_1,\beta_1]$中含E中之点 附(1)

之点，称这样的区间$[\alpha_1,\beta_1]$为"正则区间"。二等分$[\alpha_1,\beta_1]=$

$[\alpha_1,\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}]\cup[\frac{\alpha_1+\beta_1}{2},\beta_1]$，则两个子区间中至少有一个右侧无E中之点，但其含E中点，记其为$[\alpha_2,\beta_2]$，再二等分$[\alpha_2,\beta_2]=[\alpha_2,\frac{\alpha_2+\beta_2}{2}]\cup[\frac{\alpha_2+\beta_2}{2},\beta_2]$，则两个子区间中至少有一个右侧无E中之点，但其含E中之点，记其为$[\alpha_3,\beta_3]$，……

二等分$[\alpha_n,\beta_n]=[\alpha_n,\frac{\alpha_n+\beta_n}{2}]\cup[\frac{\alpha_n+\beta_n}{2},\beta_n]$，则两个子区间中至少有一个右侧无E中之点，但其含E中之点，记其为$[\alpha_{n+1},\beta_{n+1}]$。从而

$$\begin{cases} ① & [\alpha_n,\beta_n]\supset[\alpha_{n+1},\beta_{n+1}],\ n\in N^* \\ ② & \beta_n-\alpha_n=\frac{M-a_1}{2^{n-1}}\to 0 \end{cases}$$

由(四)知，存在唯一一实数$\alpha_0\in[\alpha_n,\beta_n]$，$n=1,2,3,\cdots$

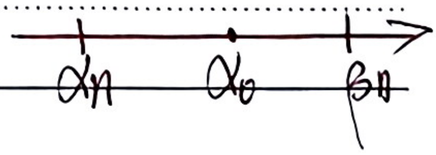
且有$\alpha_0=\lim_{n\to\infty}\alpha_n$，$\alpha_0=\lim_{n\to\infty}\beta_n$。下只需证明$\alpha_0$即是E的上确界。

(1°) 对$\forall x\in E$，由于$[\alpha_n,\beta_n]$的右侧无E中之点知，$x\le\beta_n$，$n\in N^*$

令$n\to\infty$，得$x\le\alpha_0$，即$\alpha_0$是E的一个上界；

(2°) 对$\forall\varepsilon>0$，由$\beta_n-\alpha_n\to0\ (n\to\infty)$知，$\exists N\in N^*$，当$n>N$时，

$0\le\alpha_0-\alpha_n<\beta_n-\alpha_n<\varepsilon\Rightarrow\alpha_n>\alpha_0-\varepsilon$.




由于$[\alpha_n,\beta_n]$是正则区间，$\exists x\in[\alpha_n,\beta_n]$，$x\in E$使

$\alpha_0-\varepsilon<\alpha_n\le x\le\beta_n$ 即同时有
$$\begin{cases} ① & x\le\alpha_0,\ \forall x\in E \\ ② & 对\forall\varepsilon>0,\ \exists x\in E 使 x>\alpha_0-\varepsilon \end{cases}$$
得证(2)

这就表明：$\alpha_0$是$E=\{\alpha_n\}$的上确界。即$\alpha_0=\sup E$.

(三) 函数极限之24种形式的精确定义：(设$x_0$为常数)(熟背)

(1). $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 对$\forall\ 0<|x-x_0|<\delta$, $|f(x)-A|<\varepsilon$;

(2). $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 对$\forall\ 0<x-x_0<\delta$, $|f(x)-A|<\varepsilon$;

(3). $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 对$\forall$: $-\delta<x-x_0<0$, $|f(x)-A|<\varepsilon$;

(4). $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists\delta>0$, 对$\forall\ 0<|x-x_0|<\delta$, $f(x)>M$.

(5). $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists\delta>0$, 对$\forall\ 0<x-x_0<\delta$, $f(x)>M$,

(6). $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists\delta>0$, 对$\forall -\delta<x-x_0<0$, $f(x)>M$;

(7). $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists\delta>0$ 对$\forall\ 0<|x-x_0|<\delta$, $f(x)<-M$;

(8). $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists\delta>0$, 对$\forall$: $0<x-x_0<\delta$, $f(x)<-M$;

(9). $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0\ \exists\delta>0$, 对$\forall$: $-\delta<x-x_0<0$, $f(x)<-M$;

(10). $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists\delta>0$, 对$\forall\ 0<|x-x_0|<\delta$, $|f(x)|>M$;

(11). $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists\delta>0$, 对$\forall\ 0<x-x_0<\delta$, $|f(x)|>M$;

(12). $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists\delta>0$, 对$\forall -\delta<x-x_0<0$, $|f(x)|>M$;

附 (3)

(13). $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A\in R \iff \forall\varepsilon>0, \exists X_0>0$, 对 $\forall x>X_0$, $|f(x)-A|<\varepsilon$;

(14). $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A\in R \iff \forall\varepsilon>0, \exists X_0>0$, 对 $\forall x<-X_0$, $|f(x)-A|<\varepsilon$;

(15). $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A\in R \iff \forall\varepsilon>0, \exists X_0>0$, 对 $\forall |x|>X_0$, $|f(x)-A|<\varepsilon$;

(16). $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \iff \forall M>0, \exists X_0>0$, 对 $\forall x>X_0$, $f(x)>M$;

(17). $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \iff \forall M>0, \exists X_0>0$, 对 $\forall x>X_0$, $f(x)<-M$;

(18). $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty \iff \forall M>0, \exists X_0>0$, 对 $\forall x>X_0$, $|f(x)|>M$;

(19). $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \iff \forall M>0, \exists X_0>0$, 对 $\forall x<-X_0$, $f(x)>M$;

(20). $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \iff \forall M>0, \exists X_0>0$, 对 $\forall x<-X_0$ $f(x)<-M$;

(21). $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty \iff \forall M>0, \exists X_0>0$, 对 $\forall x<-X_0$ $|f(x)|>M$;

(22). $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty \iff \forall M>0, \exists X_0>0$, 对 $\forall |x|>X_0$, $f(x)>M$;

(23). $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty \iff \forall M>0, \exists X_0>0$, 对 $\forall |x|>X_0$, $f(x)<-M$;

(24). $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty \iff \forall M>0, \exists X_0>0$, 对 $\forall |x|>X_0$, $|f(x)|>M$.

---

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\beta$ 中 $\beta$ 有常数、$+\infty$、$-\infty$、$\infty$ 四种选择；$\alpha$ 有常数 $x_0$、$x_0^+$、$x_0^-$、$+\infty$、$-\infty$、$\infty$ 六种选择，共有 $C_4^1\times C_6^1=24$ 种组合。