# 1 常见错误

**例 1.1.** 判断下列命题是否有误，充分性必要性分开判断.

1. $f(x)$ 在 $x_0$ 处可微 $\Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2}$ 存在且有限.
2. $f(x)$ 无界 $\Leftrightarrow \exists\, a, \lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.
3. $f(x)$ 有界 $\Leftrightarrow \forall a\in R, \lim\limits_{x\to a} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x), \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ 皆存在且有限.
4. $f(x)$ 在 $x_0$ 处可微 $\Rightarrow$ 存在 $x_0$ 的邻域 $I$, 使得 $f(x)$ 在 $I$ 上连续.
5. $f(x)$ 在区间 $I$ 上可微,$f'(x)$ 在 $I$ 上单调 $\Rightarrow f'(x)$ 在 $I$ 上连续.
6. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 $(a,b)$ 上可微, 则 $f'(x)>0 \Leftrightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增.
7. $f(x),g(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微 $\Rightarrow \max\{f(x),g(x)\}$ 在 $x_0$ 处可微.
8. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为凸函数, 且 $\exists\, c\in(a,b)$, 使得 $f(a)=f(b)=f(c)\Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为常值函数.

1. $\Rightarrow$ 左右导定义;$\not\Leftarrow f(x)=|x|$.
2. $\Leftarrow$ 定义;$\not\Rightarrow f(x)=\begin{cases} x, x\in Q \\ 0, otherwise \end{cases}$.
3. $\not\Rightarrow f(x)=\sin x$;$\Leftarrow$ 分区间.
4. $\not\Rightarrow f(x)=\begin{cases} x^2D(x), x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$.
5. $\Rightarrow$
6. $\Rightarrow$; $\not\Leftarrow f(x)=x^3$.
7. $\not\Rightarrow f(x)=x, g(x)=-x$.
8. 对的, 参考 thm3.27.

**例 1.2.** 判断下列命题的正误.

1. $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上二阶可微, 则 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

2. 若 $f(x)$ 在 $x_0$ 处任意阶导数均为 0, 则 $f(x)$ 在 $x_0$ 邻域内为常值函数.

3. 连续函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在某点 $x_0$ 处任意阶导相同, 且 $f(x_0) = g(x_0)$, 则在 $x_0$ 邻域内 $f(x) = g(x)$.

1. $\nRightarrow f(x) = 1/x$. 如果加强为 $f'$ 在 $[a,b]$ 上处处有定义, 还是 $\nRightarrow$,$f(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x), x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$.

2. $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$.

3. 跟上面那道题一样.

**例 1.3.** 给出满足下列命题的例子 *(很复杂只用了解这这俩都存在就行)*

1. $\mathbb{R}$ 上的无理点可微而在有理点不可微的连续函数 $f(x)$.

2. 处处连续但处处不可微的连续函数 $f(x)$.

**例 1.4.** 请指出以下做法的错误.

求 $y = f(x) = xe^x$ 的反函数的微商.

反函数 $x = f^{-1}(y)$ 记为 $f^{-1} = g$, 则 $x'_y = \dfrac{1}{g'(y)} = \dfrac{1}{e^y + ye^y}$.

这道题错误的使用了两种方法. 后面建议分清楚各个方法不要写串, 而且不推荐重新将 $x, y$ 交换符号, 这样容易把自己绕晕.

以后遇见能求特别多次导的就直接写微分,$dy/dx$ 就是微商,$dx/dy$ 就是反函数的微商. 否则就用 $x'_{y_0} = \dfrac{dx}{dy}\Big|_{y=y_0} = \dfrac{1}{dy/dx\big|_{x=x_0}} = \dfrac{1}{f'(x_0)}$, $(x_0 = f^{-1}(y_0))$. 保留 $x, y$ 的也非常多, 不用特意化简.

# 2 高阶导数与微分

递推关系计算高阶导数.

**例 2.1.** $f(x) = x^n \ln x$, 求 $f^{(n)}(x)$.

① $$\sum_{k=1}^{n}\frac{C_n^k(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{C_{n-1}^k(-1)^{k-1}}{k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{C_{n-1}^{k-1}(-1)^{k-1}}{k}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{C_n^k(-1)^{k-1}}{k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{C_{n-1}^k(-1)^{k-2}}{k}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}C_n^k(-1)^{k-1}$$

$$= A(n)-A(n-1)=\frac{1}{n}\Rightarrow A(n)=\sum_k\frac{1}{k}$$

②. $$y_n=(x^n\ln x)^{(n)}$$

$$=(nx^{n-1}\ln x+x^{n-1})^{(n-1)}$$

$$=n(x^{n-1}\ln x)^{(n-1)}+(x^{n-1})^{(n-1)}$$

$$=ny_{n-1}+(n-1)!$$

$$\Rightarrow\frac{y_n}{n!}=\frac{y_{n-1}}{(n-1)!}+\frac{1}{n}\Rightarrow\frac{y_n}{n!}=\sum_k\frac{1}{n}\Rightarrow y_n=n!\sum_k\frac{1}{k}.$$

**例 2.2.** $f$ 二阶可导,$y=f(x+y)$, 求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

$dy=f'(x+y)(dx+dy)$, 所以 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{f'(x+y)}{1-f'(x+y)}$.

$d(\dfrac{dy}{dx})=\dfrac{1}{(1-f'(x+y))^2}d(f'(x+y))=\dfrac{f''(x+y)}{(1-f'(x+y))^2}(dx+dy)=\dfrac{f''(x+y)}{(1-f'(x+y))^2}(1+\dfrac{f'(x+y)}{1-f'(x+y)})=\dfrac{f''(x+y)}{(1-f'(x+y))^3}$.

**例 2.3.** 设 $a,b\in R,b>0$, 考察函数 $f:[-1,1]\to R$, 满足这样的函数有哪些

$$f(x)\begin{cases}x^a\sin\dfrac{1}{x},x\neq 0\\ 0,x=0\end{cases}$$

则函数 $f$ 在什么条件下在 $[-1,1]$ 上有界?$f$ 在什么条件下在 $[-1,1]$ 上连续?$f$ 在什么条件下在 $[-1,1]$ 上可微?

$f'(x)$ 在什么条件下有界?$f'(x)$ 在什么条件下在 $[-1,1]$ 上连续?$f'(x)$ 在什么条件下在 $[-1,1]$ 上可微?

$a\geq 0$; $a\geq 0$; $a>1$;

$a\geq 1+b$; $a>1+b$; $a>2+b$;

# 3 微分中值定理

**两个方向的同一个问题**

一是微分中值定理中要求 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 $(a,b)$ 上可微, 满足这样的函数有哪些?

二是我们已知 Darboux 定理

**定理 3.1.** *Darboux 定理: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, 则 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足介值性质, 即对任意 $c \in (f'(a), f'(b))$, 存在 $x_0 \in (a,b)$, 使得 $f'(x_0) = c$.*

这个定理限定了导函数应该是什么性质, 不是每个函数都能是某个函数的导函数, 能称为导函数的函数有哪些?

这两个问题都是在问连续又可导的函数的导函数的特征. 事实上, 连续且可导函数 $f$ 的导函数 $f'(x)$ 在区间上无跳跃间断点, 无可去间断点. 如果区间是开区间, 那么导函数在内点处极限不能是无穷, 导函数在内点有限, 因此只能是震荡间断点.

例如 $f(x) = x^2 \sin(1/x), x \in [-1,1]$,$f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x), x \neq 0$, 在 $f'(0) = 0$, 导函数在 0 处震荡间断.

如果我们要求导函数在区间上单调, 我们就去除了震荡间断点, 这样的导函数就必须是连续的, 也因此有了下列作业题.

**例 3.2.** *设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 $(a,b)$ 上可导, 且 $f'(x)$ 在 $(a,b)$ 上单调, 则 $f'(x)$ 在 $(a,b)$ 上连续.*

**注记.** *连续且可导的函数说法是指点点连续且点点可导. 而连续可导, 指的是有连续的导函数. 前者比后者弱, 不要混用.*

## 3.1 微分中值的应用

**单侧导数与导函数的单侧极限**

单侧导数定义为:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'_+(x)$$

导函数的单侧极限定义为:

$$\lim_{h \to 0^+} f'(x+h) = f'(x+0) := f'(x^+)$$

对于大多数函数这两者是不一样的, 比如 $f(x)=|x|$, 在 $x=0$ 处 $f'_+(0)=1$, 而 $f'(0^+)$ 不存在. 但是也有定理保证了这两者是相等的.

**定理 3.3.** *函数 $f$ 满足:*

*(1) 在 $[a,b)$ 上有定义;*

*(2) 在 $(a,b)$ 上可导;*

*(3) 在 $a$ 处右连续, 即 $f$ 在 $[a,b)$ 上连续;*

*则 $f'(a^+)$ 存在 $\Rightarrow f'_+(a)$ 存在.*

*且有 $f'(a^+)=f'_+(a)=A$, $A$ 可以是有限值, 也可以是 $\pm\infty$.*

可以用微分中值定理来证明.

*证明.* 令 $\Delta x=x-a,\Delta y=f(x)-f(a)$, 则有 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$. 在闭区间 $[a,a+\Delta x]$ 应用 Lagrange 中值定理, 存在 $\theta\in(a,a+\Delta x)$, 使得 $\Delta y=f'(a+\theta\Delta x)\Delta x$, 其中 $0<\theta<1$. 设 $\lim\limits_{x\to a^+}f'(x)=A$, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $0<\Delta x<\delta$ 时, 有 $|f'(x)-A|<\varepsilon,a<x<a+\Delta x$. 因此 $\Delta x<\delta$ 时, 有 $|f'(a+\theta\Delta x)-A|<\varepsilon$, 所以 $|f'(a+\theta\Delta x)-A|<\varepsilon\Delta x$. 即证.

反之不成立, 如 $f(x)=x^2\sin(1/x),x\in[-1,1]$, 在 $x=0$ 处 $f'_+(0)=0$, 而 $f'(0^+)$ 不存在. □

**例题**

**例 3.4.** *若 $f(x)$ 在区间 $I$ 上可导, 且 $f'(x)=0$, 则 $f(x)$ 在 $I$ 上为常值函数.*

**例 3.5.** *若 $f(x)$ 在区间 $I$ 上可导, 且 $f'(x)>0$, 则 $f(x)$ 在 $I$ 上单调递增.*

**例 3.6.** *若 $f(x)$ 在区间 $(a,b)$ 上可导且导函数有界, 则 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上有界.*

**例 3.7.** *设函数 $f$ 在点 $a$ 处二阶可导，且 $f''(a)\neq 0$，则在 $h$ 充分小时，成立 $f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h$，而且其中的 $\theta$ 具有性质 $\lim\limits_{h\to 0}\theta(h)=1/2$.*

*证明.* 由于存在 $f''(a)$，因此在 $a$ 的一个邻域上 $f$ 可微。当 $h$ 充分小时，可在区间 $[a,a+h]$ $(h>0)$ 或 $[a+h,a]$ $(h<0)$ 上用 Lagrange 中值定理，得到 $f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h,(1)$ 其中 $0<\theta<1$。

考虑分式 $I=\dfrac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{h^2}$.(2) 若令 $F(x)=f(a+x)-f'(a)x$, $G(x)=x^2$，则上述的分子为 $F(h)-F(0)$，分母为 $G(h)-G(0)$。用 Cauchy 中值定理，存在 $\eta\in(0,h)$ 或 $(h,0)$，使得 $I=\dfrac{f'(a+\eta)-f'(a)}{2\eta}$.

另一方面，将 (1) 代入 (2) 的分子，又有 $I=\dfrac{f'(a+\theta h)h-f'(a)h}{h^2}=\dfrac{f'(a+\theta h)-f'(a)}{h}$.

令以上两个表达式相等，并写成 $\theta\cdot\dfrac{f'(a+\theta h)-f'(a)}{\theta h}=\dfrac{f'(a+\eta)-f'(a)}{2\eta}$. 由于 $0<\theta<1$，$\eta$ 在 $a+h$ 之间，而且有条件 $f''(a)\neq 0$，因此在上述两边令 $h\to 0$，就可以得到 $\lim\limits_{h\to 0}\theta(h)=1/2$。 □ □

## 3.2 辅助函数

一些常用的辅助函数构造在这里给出.

**例 3.8.**

(1) $f'(x)+\lambda f(x)=0$, 构造 $g(x)=f(x)e^{\lambda x}$.

(2) $f'(x)+f(x)=0$, 构造 $g(x)=f(x)e^{x}$.

(3) $f'(x)-f(x)=0$, 构造 $g(x)=f(x)e^{-x}$.

(4) $f''(x)-f(x)=0$, 构造 $g(x)=e^{x}(f(x)-f'(x))$,$g(x)=e^{-x}(f(x)+f'(x))$.

(5) $f''(x)+f(x)=0$, 构造 $g(x)=e^{x}(f(x)+f'(x))$,$g(x)=e^{-x}(f(x)-f'(x))$.

(6) $xf'(x)+\alpha f(x)=0$, 构造 $g(x)=f(x)x^{\alpha}$.

(7) $xf(x)+f'(x)=0$, 构造 $g(x)=e^{x^2/2}f(x)$.

也列不出所有的情况, 其他的自己凑一凑试一试.

**例 3.9.** *$f\in C[a,b], f\in D(a,b)$, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使成立*

$$f(b)-f(a)=\ln\frac{b}{a}f'(\xi)\xi.$$

**例 3.10.** *$f\in C[a,b], f\in D(a,b)$,$f(a)=f(b)=0$, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使成立*

$$f'(\xi)+f(\xi)=0.$$

**例 3.11.** $f \in C[a,b], f \in D(a,b)$,$a,b>0$, 证明: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使成立

$$f(\xi)-\xi f'(\xi)=\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}.$$

$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$

对于这种题我们希望找到一些通法, 但是在此之前, 我们先来看看一类解方程问题. 如:$f(x)+f'(x)=0, f(0)=1$, 求 $f(x)$.

这种带有 $f'(x)$ 的方程, 称作微分方程. 单论这道题也不难解, 构造 $g(x)=e^x f(x)$. 后面 B1 的第八章会讲一些复杂的微分方程的求解问题. 但是我们先跳过一些积分的知识, 直接讲这种题是怎么命出来的.

**微分方程构造辅助函数**

**例 3.12.** $f(x) \in C[a,b], f(x) \in D(a,b), f(a)=f(b)=0$, 证明: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使成立

$$f'(\xi)+f^2(\xi)=0.$$

这种用罗尔定理的题目的出法, 都是找到一个不为 0 的函数 $g$, 令 $F(x)=f(x)g(x)$, 给一组 $F(a)=F(b)=a$, 算出 $f(a), f(b)$ 给你, 让你证明 $F'(\xi)=0$(通常还是消掉了其中不为 0 的项).

因此反过可以解微分方程 $f'(x)+f^2(x)=0$. 得到解 $\ln|f(x)e^{\int_a^x f(t)dt}|=C$. 于是令 $F(x)=f(x)e^{\int_a^x f(t)dt}$, 求导就发现 $F'(x)=f'(x)+f^2(x)$.

稍微改变一点 $g, F$, 看一下能批量命出来多少题.

$F(x)=f(x)e^{\int_a^x f^2(t)dt}$,$F'(x)=f'(x)+f^3(x)$.

**例.** $f(x) \in C[a,b], f(x) \in D(a,b), f(a)=f(b)=0$, 证明: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使成立

$$f'(\xi)+f^3(\xi)=0.$$

$F(x)=f(x)e^{\int_a^x 1/tdt}$,$F'(x)=f'(x)+f(x)/x$.

**例.** $f(x) \in C[a,b], f(x) \in D(a,b), f(a)=f(b)=0, a>0$, 证明: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使成立

$$f'(\xi)+f(\xi)/\xi=0.$$

有一些题不是 $f(a)=f(b)$, 那就化成如上形式就好.

**例 3.13.** $f(x) \in C[0,1], f(x) \in D(0,1), f(0)=0, f(1)=1$, 证明: 存在 $\xi \in$

$(0,1)$, 使成立

$$f'(\xi)=1.$$

$F(x)=f(x)-x$,$F(0)=F(1)=0.f'(\xi)=1\Leftrightarrow F'(\xi)=0.$

**嵌套着用两个辅助函数**

含二阶导的题有可能是参考上面的辅助函数, 也可能是要用两次罗尔定理.

**例 3.14.** $f(x)\in C[0,1], f(x)\in D^2(0,1), f(0)=0, f(1)=1, f'(0)=1$, 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使成立

$$f''(\xi)-f'(\xi)+1=0.$$

解: 令 $g(x)=f(x)-x$, 则 $g(0)=g(1)=0, g'(0)=0.f''(\xi)-f'(\xi)+1=0\Leftrightarrow g''(\xi)-g'(\xi)=0.$

构造 $G(x)=e^{-x}g(x)$, 存在 $\eta\in(0,1)$, 使得 $G'(\eta)=e^{-\eta}(g'(\eta)-g(\eta))=0.$

再构造 $H(x)=g'(x)-g(x)$, 存在 $\xi\in(0,\eta)$, 使得 $H'(\xi)=g''(\xi)-g'(\xi)=0.$

**例 3.15.** $f(x)\in C[a,b], f(x)\in D^(a,b)$, 证明: 存在 $\xi,\eta\in(a,b),\xi\neq\eta$, 使成立

$$f'(\xi)f'(\eta)=\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]^2.$$

证明. **法一**

令 $F(x):=[f(x)-f(a)]^2-\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]^2(x-a)^2$, 则有 $F(a)=F(b)=0$. 于是由 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $F'(\xi)=0$, 也即 $\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}\cdot f'(\xi)=\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]^2$, 再由 Lagrange 中值定理, 存在 $\eta\in(a,\xi)$ 使得 $\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}=f'(\eta)$, 于是 $f'(\xi)f'(\eta)=\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]^2$.

**法二**

令 $\varphi(x):=[f(x)-f(a)]^2,\quad\psi(x):=(x-a)^2$, 则由 Cauchy 中值定理, 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{\psi(b)-\psi(a)}=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}$, 也就是 $\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]^2=\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}\cdot f'(\xi)$. 再由 Lagrange 中值定理, 存在 $\eta\in(a,\xi)$ 使得 $\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}=f'(\eta)$, 代入即得结论。

□

**拉格朗日与柯西微分中值定理**

**例 3.16.** $f(x) \in C[0,1], f(x) \in D(0,1), f(0) = 0, f(1) = 1$, 证明: 存在 $\xi, \eta \in (0,1), \xi \neq \eta$, 使成立

$$\frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a + b.$$

分析:$f'(\xi) = \dfrac{f(c)}{c}, f'(\eta) = \dfrac{1-f(c)}{1-c}$.

故 $\dfrac{a}{f'(\xi)} + \dfrac{b}{f'(\eta)} = \dfrac{a}{f(c)/c} + \dfrac{b}{(1-f(c))/(1-c)} = \dfrac{c(a - af(c) - bf(c)) + bf(c)}{(1-f(c))f(c)}$.

希望最后一项为常数, 只需要 $f(c) = \dfrac{a}{a+b}$. 由介值性,$c$ 是存在的. 再顺着写过程就行.

**练习**

**例 3.17.** $f \in C[0,1], f \in D^2(0,1)$,$f(0) = f(1)$, 证明: 存在 $\xi \in (0,1)$, 使成立

$$f''(\xi) = \frac{f'(\xi)}{1-\xi}.$$

$g(x) = (x-1)f'(x)$,$f'(\eta) = 0 \Rightarrow g(\eta) = g(1) = 0, g'(\xi) = f'(\xi) + (\xi - 1)f''(\xi) = 0$.

**例 3.18.** $f \in C[0,1], f \in D^2(0,1)$,$f(0) = f(1)$, 证明: 存在 $\xi \in (0,1)$, 使成立

$$f''(\xi) = \frac{2f'(\xi)}{1-\xi}.$$

$g(x) = (x-1)^2 f'(x)$,$f'(\eta) = 0 \Rightarrow g(\eta) = g(1) = 0, g'(\xi) = 2(\xi-1)f'(\xi) + (\xi-1)^2 f''(\xi) = 0$.

**例 3.19.** $f \in C[a,b], f \in D^2(a,b)$,$f(a) = f(b) = 0, F(x) = (x-a)^2 f(x)$, 证明: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使成立

$$F''(\xi) = 0.$$

$F'(\eta) = F'(a) = 0$.

**例 3.20.** $f \in C[0,1], f \in D^2(0,1)$, 且过点 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 的直线与曲线 $y = f(x)$ 在 $(a,b)$ 内至少有一个交点 $c$, 证明: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使成立 $f''(\xi) = 0$.

构造 $F(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)$, 然后用 Rolle 定理, 注意 $F(a) = F(b) = F(c) = 0$.

**例 3.21.** $f \in C[a,b], f \in D(a,b), f(a) \neq f(b)$, 证明: 存在 $\xi, \eta \in (a,b)$, 使成立

$$\frac{f'(\eta)}{2\eta} = \frac{f'(\xi)}{a+b}.$$

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a), \frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2} = \frac{f'(\eta)}{2\eta}, \frac{f'(\xi)}{b+a} = \frac{f'(\xi)}{a+b}.$$

**例 3.22.** $f \in C[0,1], f \in D(0,1), f(0) = 0, f(1) = \frac{1}{3}$. 证明: 存在 $\xi \in (0, \frac{1}{2}), \eta \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使成立

$$f'(\xi) + f'(\eta) = \xi^2 + \eta^2.$$

$g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3}, g(0) = g(1) = 0, g'(\xi) = \frac{g(1/2) - g(0)}{1/2 - 0}, g'(\eta) = \frac{g(1) - g(1/2)}{1 - 1/2}, g'(\xi) + g'(\eta) = \xi^2 + \eta^2 = 2[g(1) - g(0)] = 0.$

**例 3.23.** $f \in C[0,1], f \in D(0,1), f(0) = 0, f(1) = 1$. 证明: 存在 $\xi, \eta \in (0,1), \xi \neq \eta$, 使成立

$$[1 + f'(\xi)][1 + f'(\eta)] = 4.$$

$g(x) = f(x) - 2 + 3x, g(x_0) = 0, f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0}, f'(\eta) = \frac{f(1) - f(x_0)}{1 - x_0}. [1 + f'(\xi)][1 + f'(\eta)] = \frac{2 - 3x_0 - (0) + x_0}{x_0} \frac{1 - (2 - 3x_0) + (1 - x_0)}{1 - x_0} = 4.$

**例 3.24.** $f \in C[a,b], f \in D(a,b)$, 且 $f'(x) \neq 0$, 证明: 存在 $\xi, \eta \in (a,b)$, 使成立

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)} = \frac{e^b - e^a}{b-a} e^{-\eta}.$$

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}, \frac{f'(\eta)}{e^\eta} = \frac{f(b) - f(a)}{e^b - e^a}.$$

**例 3.25.** $f, g \in C[a,b], f, g \in D(a,b)$, 且 $g'(x) \neq 0$, 证明: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使成立

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(\xi) - f(a)}{g(b) - g(\xi)}.$$

$F(x) = f(x) - f(a), G(x) = g(b) - g(x).$

**例 3.26.** $f \in D^2[a, +\infty), \lim_{x \to +\infty} (f(x) + 2f'(x) + f''(x)) = 0$. 证明: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0, \lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0, \lim_{x \to +\infty} f''(x) = 0$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x f(x)}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x (f(x) + f'(x))}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x (f(x) + 2f'(x) + f''(x))}{e^x}.$$

## 3.3 微分中值求极限

**例 3.27.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{\sin x}+\sin x\right)^{\frac{1}{\sin x}}-\left(e^{\tan x}+\tan x\right)^{\frac{1}{\tan x}}}{x^3}$$

$\dfrac{3e^2}{4}$

**例 3.28.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}-(1+\tan x)^{\frac{1}{\tan x}}}{x^3}$$

$\dfrac{e}{4}$

令 $f(x) := (1+x)^{\frac{1}{x}}$，则所求极限为 $L := \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin x)-f(\tan x)}{x^3}$.

由 *Lagrange* 中值定理,有 $f(\sin x)-f(\tan x) = f'(\xi)(\sin x-\tan x)$, $\sin x \le \xi \le \tan x$,

于是 $L := \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(\xi)(\sin x-\tan x)}{x^3} = -\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0} f'(\xi)$.

当 $x\to 0$ 时，$\sin x, \tan x\to 0$，于是 $\xi\to 0$。

同时注意到 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}(x-\ln(1+x))-x\ln(1+x)}{x^2(1+x)} = -\dfrac{e}{2}$,

于是 $\lim\limits_{x\to 0} f'(\xi) = \lim\limits_{\xi\to 0} f'(\xi) = \lim\limits_{x\to 0} f'(x) = -\dfrac{e}{2}$. $L = \dfrac{e}{4}$.

Talyor 展开.

**例 3.29.** 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2k}{n^2+n+k}\right)^n$.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n^2+n+k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n^2}-\frac{2k}{n^3}-\frac{2k(k-1)}{n^4}+\frac{2k(2k-1)}{n^5}+o\left(\frac{1}{n^6}\right).$$

不太严谨.

$$= \frac{n(n+1)}{n^2}-\frac{n(n+1)}{n^3}-\frac{\frac{2}{3}n(n+1)(n-1)}{n^4}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= 1-\frac{2n^2+3n-2}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \left(1-\frac{2n^2}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = e^{-2/3}+o(1) \quad (n\to\infty)$$