1 常见错误

例 1.1. 判断下列命题是否有误, 充分性必要性分开判断.

1. $f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2}$ 存在且有限.
2. $f(x)$ 无界 $\Leftrightarrow \exists\, a, \lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.
3. $f(x)$ 有界 $\Leftrightarrow \forall a\in R, \lim\limits_{x\to a} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 皆存在且有限.
4. $f(x)$ 在 x_0 处可微 $\Rightarrow$ 存在 x_0 的邻域 I, 使得 $f(x)$ 在 I 上连续.
5. $f(x)$ 在区间 I 上可微,$f'(x)$ 在 I 上单调 $\Rightarrow f'(x)$ 在 I 上连续.
6. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微, 则 $f'(x)>0 \Leftrightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增.
7. $f(x), g(x)$ 在 $x=x_0$ 处可微 $\Rightarrow \max\{f(x),g(x)\}$ 在 x_0 处可微.
8. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为凸函数, 且 $\exists\, c\in(a,b)$, 使得 $f(a)=f(b)=f(c)\Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为常值函数.

例 1.2. 判断下列命题的正误.

1. $f(x)$ 在 (a,b) 上二阶可微, 则 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.
2. 若 $f(x)$ 在 x_0 处任意阶导数均为 0, 则 $f(x)$ 在 x_0 邻域内为常值函数.
3. 连续函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在某点 x_0 处任意阶导相同, 且 $f(x_0)=g(x_0)$, 则在 x_0 邻域内 $f(x)=g(x)$.

例 1.3. 给出满足下列命题的例子

1. $\mathbb{R}$ 上的无理点可微而在有理点不可微的连续函数 $f(x)$.
2. 处处连续但处处不可微的连续函数 $f(x)$.

例 1.4. 请指出以下做法的错误.

求 $y=f(x)=xe^x$ 的反函数的微商.

反函数 $x=f^{-1}(y)$ 记为 $f^{-1}=g$, 则 $x'_y=\dfrac{1}{g'(y)}=\dfrac{1}{e^y+ye^y}$.

以后遇见能求特别多次导的就直接写微分,dy/dx 就是微商,dx/dy 就是反函数的微商. 否则就用 $x'_{y_0}=\dfrac{dx}{dy}\Big|_{y=y_0}=\dfrac{1}{dy/dx\big|_{x=x_0}}=\dfrac{1}{f'(x_0)},(x_0=f^{-1}(y_0))$. 保留 x,y 的也非常多, 不用特意化简.

2 高阶导数与微分

例 2.1. $f(x) = x^n \ln x$, 求 $f^{(n)}(x)$.

例 2.2. f 二阶可导,$y = f(x+y)$, 求 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$.

例 2.3. 设 $a, b \in R, b > 0$, 考察函数 $f : [-1, 1] \to R$. $f(x) \begin{cases} x^a \sin \dfrac{1}{x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$

则函数 f 在什么条件下在 $[-1, 1]$ 上有界?f 在什么条件下在 $[-1, 1]$ 上连续?f 在什么条件下在 $[-1, 1]$ 上可微?

$f'(x)$ 在什么条件下有界?$f'(x)$ 在什么条件下在 $[-1, 1]$ 上连续?$f'(x)$ 在什么条件下在 $[-1, 1]$ 上可微?

3 微分中值定理

两个方向的同一个问题

一是微分中值定理中要求 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可微, 满足这样的函数有哪些?

二是我们已知 Darboux 定理

定理 3.1. *Darboux 定理: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微, 则 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上满足介值性质, 即对任意 $c \in (f'(a), f'(b))$, 存在 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f'(x_0) = c$.*

这个定理限定了导函数应该是什么性质, 不是每个函数都能是某个函数的导函数, 能称为导函数的函数有哪些?

这两个问题都是在问连续又可导的函数的导函数的特征. 事实上, 连续且可导函数 f 的导函数 $f'(x)$ 在区间上无跳跃间断点, 无可去间断点. 如果区间是开区间, 那么导函数在内点处极限不能是无穷, 导函数在内点有限, 因此只能是震荡间断点.

例如 $f(x) = x^2 \sin(1/x), x \in [-1, 1], f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x), x \neq 0$, 在 $f'(0) = 0$, 导函数在 0 处震荡间断.

如果我们要求导函数在区间上单调, 我们就去除了震荡间断点, 这样的导函数就必须是连续的, 也因此有了下列作业题.

例 3.2. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导, 且 $f'(x)$ 在 (a, b) 上单调, 则 $f'(x)$ 在 (a, b) 上连续.

3.1 微分中值的应用

单侧导数与导函数的单侧极限

单侧导数定义为:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'_+(x)$$

导函数的单侧极限定义为:

$$\lim_{h\to 0^+}f'(x+h)=f'(x+0):=f'(x^+)$$

对于大多数函数这两者是不一样的, 比如 $f(x)=|x|$, 在 $x=0$ 处 $f'_+(0)=1$, 而 $f'(0^+)$ 不存在. 但是也有定理保证了这两者是相等的.

定理 3.3. *函数 f 满足:*

(1) 在 $[a,b)$ 上有定义;

(2) 在 (a,b) 上可导;

(3) 在 a 处右连续, 即 f 在 $[a,b)$ 上连续;

则 $f'(a^+)$ 存在 $\Leftrightarrow$ $f'_+(a)$ 存在.

且有 $f'(a^+)=f'_+(a)=A$, A 可以是有限值, 也可以是 $\pm\infty$.

例题

例 3.4. *若 $f(x)$ 在区间 I 上可导, 且 $f'(x)=0$, 则 $f(x)$ 在 I 上为常值函数.*

例 3.5. *若 $f(x)$ 在区间 I 上可导, 且 $f'(x)>0$, 则 $f(x)$ 在 I 上单调递增.*

例 3.6. *若 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上可导且导函数有界, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 上有界.*

3.2 辅助函数

一些常用的辅助函数构造在这里给出.

例 3.7.

(1) $f'(x)+\lambda f(x)=0$, 构造 $g(x)=f(x)e^{\lambda x}$.

(2) $f'(x)+f(x)=0$, 构造 $g(x)=f(x)e^{x}$.

(3) $f'(x)-f(x)=0$, 构造 $g(x)=f(x)e^{-x}$.

(4) $f''(x)-f(x)=0$, 构造 $g(x)=e^x(f(x)-f'(x))$,$g(x)=e^{-x}(f(x)+f'(x))$.

(5) $f''(x)+f(x)=0$, 构造 $g(x)=e^x(f(x)+f'(x))$,$g(x)=e^{-x}(f(x)-f'(x))$.

(6) $xf'(x)+\alpha f(x)=0$, 构造 $g(x)=f(x)x^{\alpha}$.

(7) $xf(x)+f'(x)=0$, 构造 $g(x)=e^{x^2/2}f(x)$.

也列不出所有的情况, 其他的自己凑一凑试一试.

例 3.8. $f\in C[a,b], f\in D(a,b)$, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使成立

$$f(b)-f(a)=\ln\frac{b}{a}f'(\xi)\xi.$$

例 3.9. $f\in C[a,b], f\in D(a,b)$,$f(a)=f(b)=0$, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使成立

$$f'(\xi)+f(\xi)=0.$$

例 3.10. $f\in C[a,b], f\in D(a,b)$,$a,b>0$, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使成立

$$f(\xi)-\xi f'(\xi)=\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}.$$

对于这种题我们希望找到一些通法, 但是在此之前, 我们先来看看一类解方程问题. 如:$f(x)+f'(x)=0, f(0)=1$, 求 $f(x)$.

这种带有 $f'(x)$ 的方程, 称作微分方程. 单论这道题也不难解, 构造 $g(x)=e^xf(x)$. 后面 B1 的第八章会讲一些复杂的微分方程的求解问题. 但是我们先跳过一些积分的知识, 直接讲这种题是怎么命出来的.

微分方程构造辅助函数

例 3.11. $f(x)\in C[a,b], f(x)\in D(a,b), f(a)=f(b)=0$, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使成立

$$f'(\xi)+f^2(\xi)=0.$$

这种用罗尔定理的题目的出法, 都是找到一个不为 0 的函数 g, 令 $F(x)=f(x)g(x)$, 给一组 $F(a)=F(b)=a$, 算出 $f(a), f(b)$ 给你, 让你证明 $F'(\xi)=0$(通常还是消掉了其中不为 0 的项).

因此反过可以解微分方程 $f'(x)+f^2(x)=0$. 得到解 $\ln|f(x)e^{\int_a^x f(t)dt}|=C$. 于是令 $F(x)=f(x)e^{\int_a^x f(t)dt}$, 求导就发现 $F'(x)=f'(x)+f^2(x)$.

稍微改变一点 g, F, 看一下能批量命出来多少题.

$F(x)=f(x)e^{\int_a^x f^2(t)dt}$,$F'(x)=f'(x)+f^3(x)$.

例. $f(x) \in C[a,b], f(x) \in D(a,b), f(a) = f(b) = 0$, 证明: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使成立

$$f'(\xi) + f^3(\xi) = 0.$$

$F(x) = f(x)e^{\int_a^x 1/t dt}$,$F'(x) = f'(x) + f(x)/x$.

例. $f(x) \in C[a,b], f(x) \in D(a,b), f(a) = f(b) = 0, a > 0$, 证明: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使成立

$$f'(\xi) + f(\xi)/\xi = 0.$$

有一些题不是 $f(a) = f(b)$, 那就化成如上形式就好.

例 3.12. $f(x) \in C[0,1], f(x) \in D(0,1), f(0) = 0, f(1) = 1$, 证明: 存在 $\xi \in (0,1)$, 使成立

$$f'(\xi) = 1.$$

嵌套着用两个辅助函数

含二阶导的题有可能是参考上面的辅助函数, 也可能是要用两次罗尔定理.

例 3.13. $f(x) \in C[0,1], f(x) \in D^2(0,1), f(0) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 1$, 证明: 存在 $\xi \in (0,1)$, 使成立

$$f''(\xi) - f'(\xi) + 1 = 0.$$

拉格朗日与柯西微分中值定理

例 3.14. $f(x) \in C[0,1], f(x) \in D(0,1), f(0) = 0, f(1) = 1$, 证明: 存在 $\xi, \eta \in (0,1), \xi \neq \eta$, 使成立

$$\frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a + b.$$

练习

作业 3.15. $f \in C[0,1], f \in D^2(0,1), f(0) = f(1)$, 证明: 存在 $\xi \in (0,1)$, 使成立

$$f''(\xi) = \frac{f'(\xi)}{1-\xi}.$$

作业 3.16. $f \in C[0,1], f \in D^2(0,1), f(0) = f(1)$, 证明: 存在 $\xi \in (0,1)$, 使成立

$$f''(\xi) = \frac{2f'(\xi)}{1-\xi}.$$

作业 3.17. $f\in C[a,b],f\in D^2(a,b),f(a)=f(b)=0,F(x)=(x-a)^2f(x)$, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使成立
$$F''(\xi)=0.$$

作业 3.18. $f\in C[0,1],f\in D^2(0,1)$, 且过点 $(a,f(a)),(b,f(b))$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内至少有一个交点 c, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使成立 $f''(\xi)=0$.

作业 3.19. $f\in C[a,b],f\in D(a,b),f(a)\neq f(b)$, 证明: 存在 $\xi,\eta\in(a,b)$, 使成立
$$\frac{f'(\eta)}{2\eta}=\frac{f'(\xi)}{a+b}.$$

作业 3.20. $f\in C[0,1],f\in D(0,1),f(0)=0,f(1)=\frac{1}{3}$. 证明: 存在 $\xi\in(0,\frac{1}{2}),\eta\in(\frac{1}{2},1)$, 使成立
$$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2.$$

作业 3.21. $f\in C[0,1],f\in D(0,1),f(0)=0,f(1)=1$. 证明: 存在 $\xi,\eta\in(0,1),\xi\neq\eta$, 使成立
$$[1+f'(\xi)][1+f'(\eta)]=4.$$

作业 3.22. $f\in C[a,b],f\in D(a,b)$, 且 $f'(x)\neq 0$, 证明: 存在 $\xi,\eta\in(a,b)$, 使成立
$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}.$$

作业 3.23. $f,g\in C[a,b],f,g\in D(a,b)$, 且 $g'(x)\neq 0$, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使成立
$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}.$$

3.3 其他微分证明题

例 3.24. $f\in D^2[a,+\infty),\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+2f'(x)+f''(x))=0$. 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)=0$.

例 3.25. $f(x)$ 在 R 上处处有定义, 且存在常数 $L,\alpha>1$ 使得 $|f(x)-f(y)|\leq L|x-y|^{\alpha}$, 证明:$f(x)$ 是常值函数.

3.4 微分中值求极限

例 3.26.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{\sin x}+\sin x\right)^{\frac{1}{\sin x}}-\left(e^{\tan x}+\tan x\right)^{\frac{1}{\tan x}}}{x^3}$$

例 3.27.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}-(1+\tan x)^{\frac{1}{\tan x}}}{x^3}$$

Talyor 展开.

例 3.28. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2k}{n^2+n+k}\right)^n$.