第47讲：常微分方程复习

(一) 设 $a(x), b(x) \in C(I)$，$y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 是二阶线性非齐次方程：$y''+a(x)y'+b(x)y=f(x)$ 的3个线性无关解，$f\in C(I)$.

(1). 求 $y''+a(x)y'+b(x)y=f(x)$ 的通解；

(2). 试确定函数 $a(x), b(x), f(x)$.

解(1). 先求齐次线性方程 $y''+a(x)y'+b(x)y=0$ 的基解组：

显然，$y_3(x)-y_1(x)$，$y_2(x)-y_1(x)$ 都是齐次方程的非零解，下证 $y_3(x)-y_1(x)$ 与 $y_2(x)-y_1(x)$ 在区间 I 上线性无关. 对任意常数 C_1, C_2

设 $C_1(y_3(x)-y_1(x))+C_2(y_2(x)-y_1(x))=0$，$\forall x\in I$. 则

$(-C_1-C_2)y_1(x)+C_2y_2(x)+C_1y_3(x)=0$，$\forall x\in I$. 由 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 在 I 上线性无关 $\Leftrightarrow$ $C_1-C_2=0$、$C_2=0$，$C_1=0$ 从而 $y_3(x)-y_1(x)$ 与 $y_2(x)-y_1(x)$ 在 I 上线性无关. 因此，$y_3(x)-y_1(x)$，$y_2(x)-y_1(x)$ 是 $y''+ay'+by=0$ 的一个基解组. 齐通解 $Y(x)=C_1(y_3(x)-y_1(x))+C_2(y_2(x)-y_1(x))$，$x\in I$.

再取 $y^*(x)=y_2(x)$，则 $y''+a(x)y'+b(x)y=f(x)$ 的通解为

(1)

$$y(x)=\bar{y}(x)+y^*(x)=C_1(y_3(x)-y_1(x))+C_2(y_2(x)-y_1(x))+y_1(x).$$

注：$y(x)=C_1(y_2(x)-y_3(x))+C_2(y_1(x)-y_3(x))+y_1(x)$ 也是所求的通解。

解(2) 求确定 $a(x),b(x),f(x)$，将 $y_1(x),y_2(x),y_3(x)$ 看作已知函数：

$$由\begin{cases} y_1''+a(x)y_1'+b(x)y_1=f(x) \\ y_2''+a(x)y_2'+b(x)y_2=f(x) \\ y_3''+a(x)y_3'+b(x)y_3=f(x) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y_1'a(x)+y_1b(x)-f(x)=-y_1'' \\ y_2'a(x)+y_2b(x)-f(x)=-y_2'' \\ y_3'a(x)+y_3b(x)-f(x)=-y_3'' \end{cases}$$

这是关于 $a(x),b(x),f(x)$ 的线性代数方程组，且系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} y_1' & y_1 & -1 \\ y_2' & y_2 & -1 \\ y_3' & y_3 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1' & y_1 & -1 \\ y_2'-y_1' & y_2-y_1 & 0 \\ y_3'-y_1' & y_3-y_1 & 0 \end{vmatrix}=(-1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} y_2'-y_1' & y_2-y_1 \\ y_3'-y_1' & y_3-y_1 \end{vmatrix}\neq 0,\ \forall x\in I.$$

（∵ $y_2(x)-y_1(x)$，y_3-y_1 在 I 上线性无关，对应的 Wronsky 行列 $W(x)=\begin{vmatrix} y_2-y_1 & y_3-y_1 \\ y_2'-y_1' & y_3'-y_1' \end{vmatrix}$ $\neq 0 \Longrightarrow W(x)=-\begin{vmatrix} y_2'-y_1' & y_2-y_1 \\ y_3'-y_1' & y_3-y_1 \end{vmatrix}=D\neq 0,\ \forall x\in I$）依 Cramer 法则.

$$a(x)=\frac{D_1}{D},\ b(x)=\frac{D_2}{D},\ f(x)=\frac{D_3}{D},\ D_1=\begin{vmatrix} -y_1'' & y_1 & -1 \\ -y_2'' & y_2 & -1 \\ -y_3'' & y_3 & -1 \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} y_1' & -y_1'' & -1 \\ y_2' & -y_2'' & -1 \\ y_3' & -y_3'' & -1 \end{vmatrix}.$$

$$D_3=\begin{vmatrix} y_1' & y_1 & -y_1'' \\ y_2' & y_2 & -y_2'' \\ y_3' & y_3 & -y_3'' \end{vmatrix}.$$

同理，若 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_{n+1}(x)$ 是 $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$ 的 $n+1$ 个线性无关解，则对 $\forall C_1,C_2,\cdots,C_n\in\mathbb{R}$，$y=\bar{y}+y^*=C_1(y_{n+1}(x)-y_1(x))+C_2(y_n(x)-y_1(x))+\cdots+C_n(y_2(x)-y_1(x))+y_1(x)$ 为所求的原方程的通解。

(2).

(三) 线性ODE初值问题之解的存在唯一性Th：

Th1：$\begin{cases} y'+p(x)y=Q(x)\,,\ p,Q\in C(I) \\ y(x_0)=y_0\,,\ x_0\in I. \end{cases}$ 之解存在唯一，为：

$$y(x)=e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}\left(\int_{x_0}^{x}Q(t)e^{\int_{x_0}^{t}p(s)ds}dt+y_0\right)\quad (\ast).$$

证：$y'+p(x)y=Q(x)$ 两边同乘积分因子：$e^{\int_{x_0}^{x}p(t)dt}$.

$$y'e^{\int_{x_0}^{x}p(t)dt}+p(x)ye^{\int_{x_0}^{x}p(t)dt}=Q(x)e^{\int_{x_0}^{x}p(t)dt}\Leftrightarrow$$

$$\left(y(x)e^{\int_{x_0}^{x}p(t)dt}\right)'_x=Q(x)e^{\int_{x_0}^{x}p(t)dt}\Rightarrow\int_{x_0}^{x}\left(y(x)e^{\int_{x_0}^{x}p(t)dt}\right)'_x dx=\int_{x_0}^{x}Q(x)e^{\int_{x_0}^{x}p(t)dt}dx$$

$$y(x)e^{\int_{x_0}^{x}p(t)dt}\Big|_{x_0}^{x}=\int_{x_0}^{x}Q(t)e^{\int_{x_0}^{t}p(s)ds}dt\Rightarrow$$

$$y(x)e^{\int_{x_0}^{x}p(t)dt}-y(x_0)e^{\int_{x_0}^{x_0}p(t)dt}=\int_{x_0}^{x}Q(t)e^{\int_{x_0}^{t}p(s)ds}dt\Rightarrow$$

$$y(x)e^{\int_{x_0}^{x}p(t)dt}-y_0\cdot 1=\int_{x_0}^{x}Q(t)e^{\int_{x_0}^{t}p(s)ds}dt\Leftrightarrow$$

$$y(x)=e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}\left(\int_{x_0}^{x}Q(t)e^{\int_{x_0}^{t}p(s)ds}dt+y_0\right)$$

Th2：$\begin{cases} y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)\,,\ p,q,f\in C(I). \\ y(x_0)=a_0,\ y'(x_0)=a_1,\ x_0\in I \end{cases}$ 之解存在唯一.

证：设 $y_1(x),y_2(x)$ 是 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的一个基解组，则齐通解

为 $\bar{Y}(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$. 设 $y^*(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{y_1(t)y_2(x)-y_2(t)y_1(x)}{W(t)}f(t)dt$

则非齐通解 $y(x)=\bar{Y}(x)+y^*(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+y^*(x)$. $\Rightarrow$

$y'(x)=C_1y_1'(x)+C_2y_2'(x)+(y^*(x))'\Rightarrow\begin{cases} a_0=y(x_0)=C_1y_1(x_0)+C_2y_2(x_0)+y^*(x_0) \\ a_1=y'(x_0)=C_1y_1'(x_0)+C_2y_2'(x_0)+y^{*\prime}(x_0)\end{cases}$

(3).

即 $\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = a_0 - y^*(x_0) \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = a_1 - y^{*\prime}(x_0) \end{cases}$ 且 $D = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = W(x_0) \neq 0$, $\forall x_0 \in I$.

依Cramer法则, $c_1 = \frac{D_1}{D}$, $c_2 = \frac{D_2}{D}$, $D_1 = \begin{vmatrix} a_0 - y^*(x_0) & y_2(x_0) \\ a_1 - y^{*\prime}(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \cdots$

把定出的 c_1, c_2 代回 $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y^*(x)$. 则初值问题之解由系数 $p(x), q(x), f(x), x_0, a_0, a_1$ 唯一确定。

Th3: $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, $p, q \in C(I)$ 的基本解组的存在性证明:

证: $\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ y(x_0) = 1,\ y'(x_0) = 0 \end{cases}$ 之解存在唯一, 记作 $y_1(x)$, 则 $y_1(x) \not\equiv 0$.

否则, 与 $y(x_0) = 1$ 矛盾!, $x_0 \in I$.

又 $\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ y(x_0) = 0,\ y'(x_0) = 1 \end{cases}$ 之解存在唯一, 记作 $y_2(x)$, 则 $y_2(x) \not\equiv 0$.

现证 $y_1(x), y_2(x)$ 在 I 上线性无关. 令 $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$, $x \in I$.

则 $W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow W(x) = W(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx} \neq 0$, $\forall x \in I$.

故由 $y_1(x), y_2(x)$ 在 I 上线性无关, 从而, $y_1(x), y_2(x)$ 是 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的一个基本解组. 事实上, 对 $\forall \alpha \neq 0, \beta \neq 0$, $\alpha y_1(x)$ 与 $\beta y_2(x)$ 也是 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ 的基本解组. 因此, 基本解组一旦存在, 则有无穷多个。

(4).

Thm：n阶线性ODE初值问题：

$$\begin{cases} y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\cdots+a_ny=f(x), & a_i\in C(I). \\ y(x_0)=a_0,\ y'(x_0)=a_1,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=a_{n-1} & x_0\in I \end{cases}$$

之解存在且唯一。

(三)，用变量代换法求解下列ODE：

(1). $y'+x=\sqrt{x^2+y}$ ，(2) $y'=\cos(x-y)$ ，(3). $y'-e^{x-y}+e^x=0$

(4). $y'+\sin y+x\cos y+x=0$. (5). $y^3dx+2(x^2-xy^2)dy=0$.

(6). $xyy''+x(y')^2-yy'=0$. (7). $xy'(\ln x)\sin y+(1-x\cos y)\cos y=0$

解(1). 令 $\sqrt{x^2+y}=u$，则 $y+x^2=u^2 \Rightarrow y'+2x=2uu' \Rightarrow y'=2uu'-2x=u-x$

$\Rightarrow 2uu'-x=u \Rightarrow u'=\dfrac{x+u}{2u}=\dfrac{1+\frac{u}{x}}{2\frac{u}{x}}$ 令 $\frac{u}{x}=v \Rightarrow u=xv \Rightarrow$

$u'=v+x\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{1+v}{2v} \Rightarrow x\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{1+v}{2v}-v=\dfrac{1+v-2v^2}{2v} \Rightarrow$

$\displaystyle\int\frac{2v\,dv}{2v^2-v-1}=\int-\frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{2}{3}\left(\int\frac{dv}{v-1}+\int\frac{dv}{2v+1}\right)=-\ln x+\ln C_1$

$\frac{2}{3}\left(\ln(v-1)+\frac{1}{2}\ln(2v+1)\right)=-\ln x+\ln C_1=\ln\frac{C_1}{x}=\ln\left((v-1)\sqrt{2v+1}\right)^{\frac{2}{3}}$

$\left((v-1)\sqrt{2v+1}\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{C_1}{x}$，将 $v=\frac{u}{x}=\frac{\sqrt{x^2+y}}{x}$ 代入化简可得

$4(x^2+y)^3=(2x^3+3xy+C)^2$ 为所求通解。

解(2) 令 $x-y=u$，则 $1-y'=u' \Rightarrow y'=1-u'=\cos u \Rightarrow u'=1-\cos u$

(i) 当 $u=2k\pi$，即 $x-y=2k\pi$ 时，$y=x-2k\pi$ 是元素的奇解.

(ii) 当 $u\neq 2k\pi$ 时，$\int\frac{du}{1-\cos u}=\int dx=x+C_1 \Rightarrow \int\frac{du}{2\sin^2\frac{u}{2}}=x+C_1$

$-\cot\frac{u}{2}=x+C_1 \Rightarrow \cot\frac{x-y}{2}=-x+C \ (C=-C_1)$ 为通解.

解(3). 令 $e^y=u \Rightarrow y=\ln u$，$y'=\frac{u'}{u}=\frac{e^x}{e^y}-e^x=\frac{e^x}{u}-e^x \Rightarrow$

$u'+ue^x=e^x$. 这是 u 关于 x 的一阶线性方程，用公式解.

解法2：从 $y'=e^{x-y}-e^x=e^x(e^{-y}-1)$ 知，原方程是可分离变量的.

(i) 当 $y=0$ 时，满足方程，$y=0$ 是特解；

(ii) 当 $y\neq0$ 时，$\frac{dy}{e^{-y}-1}=e^x dx \Rightarrow \int\frac{e^y dy}{1-e^y}=\int e^x dx=e^x+C \Rightarrow$

$-\int\frac{d(e^y-1)}{e^y-1}=e^x+C \Rightarrow -\ln(e^y-1)=e^x+C$ 为所求通解。

解(4)：令 $\tan\frac{y}{2}=u$（万能代换），则 $y=2\arctan u \Rightarrow y'=\frac{2u'}{1+u^2}$

$\sin y=\frac{2u}{1+u^2}$，$\cos y=\frac{1-u^2}{1+u^2}$，原方程化为：

$\frac{2u'}{1+u^2}+\frac{2u}{1+u^2}+\frac{x(1-u^2)}{1+u^2}+x=0 \Rightarrow u'+u=-x$，这是 $p(x)=1$，$Q(x)=-x$

的一阶线性ODE，$u=e^{-\int p(x)dx}(\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C)=e^{-x}(\int(-x)e^x dx+C)$

$=e^{-x}(-xe^x+e^x+C)=Ce^{-x}+1-x$，即 $\tan\frac{y}{2}=e^{-x}C+1-x$ 为所求通解.

解(5)：从 $\frac{dx}{dy}=\frac{2(xy^2-x^2)}{y^3} \Rightarrow \frac{dx}{dy}-\frac{2}{y}x=\frac{-2}{y^3}x^2$，这是 $n=2$ 且

$P(y)=\frac{-2}{y}$，$Q(y)=\frac{-2}{y^3}$ 的 Bernoulli 方程. 方程两边同时除以 x^2 ……

(6).

解(6)：令 $y^2=u$，则 $2yy'=u' \Rightarrow 2((y')^2+yy'')=u'' \Rightarrow (y')^2+yy''=\frac{u''}{2}$

原方程 $x(yy''+(y')^2)=yy' \Rightarrow x\frac{u''}{2}=\frac{u'}{2} \Rightarrow u''=\frac{1}{x}u'$,

令 $u'=v$，则 $u''=v'=\frac{1}{x}v$，1) $v=0 \Rightarrow u'=0 \Rightarrow u=c_1 \Rightarrow y^2=c_1$.

$\Rightarrow y=c_0$，是特解. 2) $v\neq 0$ 时，$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln v=\ln x+\ln c_2$

$v=xc_2 \Rightarrow u'=xc_2 \Rightarrow \int du=\int xc_2dx \Rightarrow u=\frac{c_2}{2}x^2+c_3=y^2$ 为通解.

解(7)：令 $\cos y=u$ 则 $(-\sin y)y'=u'$，原方程化为：

$x\ln x(-u')+(1-xu)u=0 \Leftrightarrow u'-\frac{1}{x\ln x}u=-\frac{1}{\ln x}u^2$，$(x\neq 1)$

这是 $n=2$ 的 Bernoulli～. 同除以 u^2：$u^{-2}u'-\frac{1}{x\ln x}u^{-1}=-\frac{1}{\ln x}$，

令 $u^{-1}=v$ 则 $-u^{-2}u'=v' \Rightarrow v'+\frac{1}{x\ln x}v=\frac{1}{\ln x}$ $p(x)=\frac{1}{x\ln x}$ $Q(x)=\frac{1}{\ln x}$.

$v(x)=e^{-\int p(x)dx}(\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C)=e^{-\int\frac{dx}{x\ln x}}(\int\frac{1}{\ln x}e^{\int\frac{1}{x\ln x}dx}dx+C)$

$=e^{-\ln\ln x}(\int\frac{1}{\ln x}e^{\ln\ln x}dx+C)=\frac{1}{\ln x}(\int\frac{\ln x}{\ln x}dx+C)=\frac{1}{\ln x}(x+C)$

即 $u^{-1}=\frac{1}{\ln x}(x+C) \Rightarrow (\cos y)^{-1}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\ln x}(x+C)$ 为通解。

(四) 求解下列二阶线性非齐次方程：

(1). $x^2y''-xy'=3x^3$；(2). $x^2y''+2xy'-2y=2x\ln x+x-2$. $(x>0)$

解(1)：这是 Euler 方程. 令 $x=e^t$，则 $t=\ln x$，$xy'=y'_t=\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}y$

$\triangleq Dy$，其中，$D=\frac{d}{dt}$ 是微分算子.

(7)、

$x^2y'' = y''_{tt} - y'_t = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} = [(\frac{d}{dt})^2 - \frac{d}{dt}]y = (D^2-D)y = D(D-1)y.$

同理，$x^3y'''_{xxx} = D(D-1)(D-2)y = (D^2-D)(D-2)y = (D^3-3D^2+2D)y = y'''_{ttt} - 3y''_{tt} + 2y'_t$

余类推。原方程化为常系数方程：$y''_{tt} - y'_t - y'_t = 3e^{3t}$ 即

$y''_{tt} - 2y'_t = 3e^{3t}$，而 $y''_{tt} - 2y'_t = 0$ 的特征方程：$\lambda^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow$

$\lambda_1=0, \lambda_2=2$，$y_1(t)=e^{0t}=1$，$y_2(t)=e^{2t}$ 是 $y''_{tt}-2y'_t=0$ 的基本解组.

$\bar{y}(t) = c_1\cdot 1 + c_2 e^{2t}$，$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t)\\ y_1'(t) & y_2'(t)\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & e^{2t}\\ 0 & 2e^{2t}\end{vmatrix} = 2e^{2t} \ne 0.$

设 $y^*(t)$ 是 $y''_{tt}-2y'_t=3e^{3t}$ 的一个特解，则

$$y^*(t) = \int_0^t \frac{y_1(s)y_2(t)-y_2(s)y_1(t)}{W(s)} f(s)\,ds = \int_0^t \frac{1\cdot e^{2t} - e^{2s}\cdot 1}{2e^{2s}} 3e^{3s}\,ds$$

$$= \frac{3}{2}e^{2t}(e^t-1) - \frac{3}{2\times3}(e^{3t}-1) = e^{3t} - \frac32 e^{2t} + \frac12$$

$y''_{tt}-2y'_t = 3e^{3t}$ 的通解：$y(t) = \bar y(t) + y^*(t) = c_1 + c_2e^{2t} + \frac32 e^{2t}(e^t-1)$

$-\frac{3}{2\times3}(e^{3t}-1)$。回代：$y \xlongequal{e^t=x} c_1 + c_2x^2 + \frac32 x^2(x-1) - \frac{3}{2\times3}(x^3-1)$

$= c_1 + c_2x^2 - \frac32 x^2 + \frac12 + x^3$ 为所求通解.

(1) 解法二：从 $x^2y''-xy'=3x^3 \Rightarrow y'' = \frac1x y' + 3x = f(x,y')$，属于缺 y

的可降阶型，令 $y'=u$，则 $y''=u'=\frac1x u+3x \Rightarrow u' - \frac1x u = 3x$，$\Rightarrow \begin{cases} P(x) = -\frac1x \\ Q(x) = 3x \end{cases}$

$u(x) = e^{-\int P(x)dx}(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c_1) = e^{\int\frac1x dx}(\int 3x e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx + c_1)$

$= x(\int 3x\cdot\frac1x dx + c_1) = x(3x+c_1) = 3x^2 + c_1x$，即 $y' = 3x^2 + c_1x$

$\Rightarrow \int dy = \int(3x^2+c_1x)dx \Rightarrow y(x) = x^3 + \frac12 c_1x^2 + c_2$ 为所求通解.

(1) 解法三：待定系数法，从 $x^2y''-xy'=3x^3$ 知可设多项式

$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$ 为方程的解，代入方程定出 (8).

c_0, c_1, c_2, c_3 即可. 由 $y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2$, $y'' = 2c_2 + 6c_3x \Rightarrow$

$x^2(2c_2 + 6c_3x) - x(c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2) = 3x^3 \Leftrightarrow -c_1x + 3c_3x^3 = 3x^3 \Rightarrow$

$c_1 = 0$, $c_3 = 1$. c_0, c_2 任取. 故 $y(x) = c_0 + c_2x^2 + x^3$ 为所求通解。

解(2): Euler方程, $x>0$, 令 $x = e^t \Leftrightarrow t = \ln x \Rightarrow xy'_x = y'_t$,

$x^2y''_{xx} = y''_{tt} - y'_t$, 原方程化为: $y''_{tt} + 2y'_t - y'_t - 2y = 2e^t t + e^t - 2 \Rightarrow$

$y'' + y' - 2y = e^t(2t+1) - 2 = f_1(t) + f_2(t)$, $f_1(t) = e^t(2t+1)$, $f_2(t) = -2$.

而齐次方程: $y'' + y' - 2y = 0$ 的特征方程: $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ 有特征根

$\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$, $y_1(t) = e^{-2t}$, $y_2(t) = e^{t}$ 是 $y'' + y' - 2y = 0$ 的基解组.

$W(t) = \begin{vmatrix} e^{-2t} & e^t \\ -2e^{-2t} & e^t \end{vmatrix} = 3e^{-t} > 0$, 对 $y'' + y' - 2y = f_1(t) = e^t(2t+1)$ 而言.

$y_1^*(t) = \int_0^t \frac{y_1(s)y_2(t) - y_2(s)y_1(t)}{W(s)} f_1(s)ds = \int_0^t \frac{e^{-2s}e^t - e^s e^{-2t}}{3e^{-s}} e^s(2s+1)ds$

$= e^t\left(\frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{9}t\right)$; 对 $y'' + y' - 2y = f_2(t) = -2$ 而言, $y_2^*(t) \equiv 1$ 是特解.

而 $y'' + y' - 2y = f_1(t) + f_2(t)$ 的特解 $y^*(t) = y_1(t) + y_2(t) = e^t\left(\frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{9}t\right) + 1$.

所求通解 $y(t) = \bar{y}(t) + y^*(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^t + e^t\left(\frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{9}t\right) + 1$.

还原成原方程之解: $y(x) \xrightarrow[e^t = x]{t = \ln x} c_1\frac{1}{x^2} + c_2x + x\left(\frac{1}{3}\ln^2 x + \frac{1}{9}\ln x\right) + 1$

注: $y^*(t) = \int_0^t \frac{y_1(s)y_2(t) - y_2(s)y_1(t)}{W(s)} f(s)ds = \int_0^t \frac{e^{-2s}e^t - e^s e^{-2t}}{3e^{-s}}(2e^s s + e^s - 2)ds$.

同样解出原方程的~~通解~~特解。