第46讲：积分学复习

(一) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积的条件：

(1). $f\in R[a,b] \Longrightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有界，反之未必。

反例：设 $f(x)=\begin{cases}-1, & x\in Q, x\in[a,b]\\ +1, & x\notin Q, x\in[a,b]\end{cases}$，则 $f\notin R[a,b]$，$|f|\in R[a,b]$.

(2). $f\in R[a,b] \Longleftrightarrow \lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = I_0$（存在唯一）$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$，

当 $\lambda(T)<\delta$ 时，$\left|\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I_0\right|<\varepsilon$. 记 $\sigma(T,\xi_i)=\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

Riemann 和

(3). 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有上、确界 M，下确界 m.

令 $f(x)$ 在子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 中的上、下确界为 M_i, m_i，则对 $\forall \xi_i\in[x_{i-1},x_i]$

$m(b-a)=\sum\limits_{1}^{n} m\Delta x_i \le \underline{S}(T) \triangleq \sum\limits_{1}^{n} m_i\Delta x_i \le \sum\limits_{1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum\limits_{1}^{n} M_i\Delta x_i \triangleq \overline{S}(T) \le \sum\limits_{1}^{n} M\Delta x_i = M(b-a)$

$\underline{S}(T)$，$\overline{S}(T)$ 分别称之为对应于分割 T 的达布下和与上和。

$\Rightarrow m(b-a)\le \underline{S}(T)\le \sigma(T,\xi_i)\le \overline{S}(T)\le M(b-a)$ （✱）.

(4). 当在分点 T 的基础上，增加分点成为 $\tilde{T}$ 时，必有：

$\underline{S}(\tilde{T})\ge \underline{S}(T)$、$\overline{S}(\tilde{T})\le \overline{S}(T)$，即下和递增，上和递减。

证：设在子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 中增加一个分点 α：$[x_{i-1},x_i]=[x_{i-1},\alpha]\cup[\alpha,x_i]$ (1).

设 f 在 $[x_{i-1},\alpha]$，$[\alpha,x_i]$ 中的上、下确界分别为 $\beta_{i-1},\alpha_{i-1},\beta_i,\alpha_i$，

则必有 $\beta_{i-1}\le M_i,\ \beta_i\le M_i,\ \alpha_{i-1}\ge m_i,\ \alpha_i\ge m_i$. 此时.

$$\underline{S}(\tilde{T})=\sum_{j=1}^{i-1}m_j\Delta x_j+\alpha_{i-1}(\alpha-x_{i-1})+\alpha_i(x_i-\alpha)+\sum_{j=i+1}^{n}m_j\Delta x_j$$

$$\ge\sum_{j=1}^{i-1}m_j\Delta x_j+m_i(\alpha-x_{i-1}+x_i-\alpha)+\sum_{j=i+1}^{n}m_j\Delta x_j=\underline{S}(T)$$

同理，$\overline{S}(\tilde{T})\le\overline{S}(T)$.

(5). 设 $T,\tilde{T}$ 是对 $[a,b]$ 的任意两个分割，则必有：

$\underline{S}(T)\le\overline{S}(\tilde{T})$. 即下和永远不会超过上和。

证. 令 $T\cup\tilde{T}$ 是合并 $T,\tilde{T}$ 构成的新分割. 则 $T\cup\tilde{T}$ 的分点比 T，$\tilde{T}$ 都多. $\Rightarrow \underline{S}(T)\le\underline{S}(T\cup\tilde{T})\le\overline{S}(T\cup\tilde{T})\le\overline{S}(\tilde{T})$

(6). 随着 T 的分点的增多，$\underline{S}(T)\uparrow$ 且 $\underline{S}(T)\le M(b-a)$. 故 $\underline{S}(T)$ 有上确界，记 $\sup\limits_{T}\underline{S}(T)=\underline{I}$；而 $\overline{S}(T)\downarrow$ 且 $\overline{S}(T)\ge m(b-a)$

故 $\overline{S}(T)$ 有下确界，记 $\inf\limits_{T}\overline{S}(T)=\overline{I}$. 分别称 $\overline{I}$，$\underline{I}$ 为 f 在 $[a,b]$ 上的上、下积分。由 (5) 可得：

$$m(b-a)\le\underline{S}(T)\le\underline{I}\le\overline{I}\le\overline{S}(T)\le M(b-a)\qquad(*)$$

(注：f 在 $[a,b]$ 上的上、下积分 $\overline{I}$，$\underline{I}$ 必存在且为常数) (2).

(7). $f\in R[a,b]$的充要条件：$\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}(\overline{S}(T)-\underline{S}(T))=0$ (性3)

即 $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=0$，其中 $\omega_i=M_i-m_i$ 是 f 在 $[x_{i-1},x_i]$ 中的振幅。

证："$\Longrightarrow$"(必要性)：已知 $f\in R[a,b]$ 则 $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\sigma(T,\xi_i)=I_0\in R$. $\Leftrightarrow$

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $\lambda(T)<\delta$ 时，$|\sigma(T,\xi_i)-I_0|<\frac{\varepsilon}{3}$. $\Rightarrow$

$I_0-\frac{\varepsilon}{3}<\sigma(T,\xi_i)<I_0+\frac{\varepsilon}{3}\Rightarrow I_0-\frac{\varepsilon}{3}\le\underline{S}(T)\le\sigma(T,\xi_i)\le\overline{S}(T)\le I_0+\frac{\varepsilon}{3}$

此时，$0\le\overline{S}(T)-\underline{S}(T)\le(I_0+\frac{\varepsilon}{3})-(I_0-\frac{\varepsilon}{3})<\varepsilon\Rightarrow\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}(\overline{S}(T)-\underline{S}(T))=0$.

证"$\Longleftarrow$"(充分性)：已知 $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}(\overline{S}(T)-\underline{S}(T))=0\Rightarrow\underbrace{\forall\varepsilon>0}_{①},\underbrace{\exists\delta>0}_{②}$，当 $\underbrace{\lambda(T)<\delta}_{③}$

时，$0\le\overline{S}(T)-\underline{S}(T)<\varepsilon$，而从(性2)知：$\underline{S}(T)\le\underline{I}\le\overline{I}\le\overline{S}(T)\Rightarrow$

$0\le\overline{I}-\underline{I}\le\overline{S}(T)-\underline{S}(T)<\varepsilon\Rightarrow\overline{I}-\underline{I}=0\Rightarrow\overline{I}=\underline{I}\triangleq I_0$. 从

$$\begin{cases}\underline{S}(T)\le I_0\le\overline{S}(T)\\ \underline{S}(T)\le\sigma(T,\xi_i)\le\overline{S}(T)\end{cases}\Rightarrow\underbrace{|\sigma(T,\xi_i)-I_0|\le\overline{S}(T)-\underline{S}(T)<\varepsilon}_{④}$$

$\Rightarrow\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}|\sigma(T,\xi_i)-I_0|=0\Leftrightarrow\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\sigma(T,\xi_i)=I_0\Rightarrow f\in R[a,b]$.

(三)，可积函数类：

I)，若 $f\in C[a,b]$，则 $f\in R[a,b]$；

II)，若 f 在 $[a,b]$ 上单调有界，则 $f\in R[a,b]$；

(III) 若 f 在 $[a,b]$ 上有界且仅有有限个间断点，则 $f\in R[a,b]$.

证(I)：∵ f 在 $[a,b]$ 上 C，∴ f 在 $[a,b]$ 上一致 C：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$，对 $\forall\alpha,\beta\in[a,b]$，只要 $|\alpha-\beta|<\delta(\varepsilon)$，则 $|f(\alpha)-f(\beta)|\le\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$，当 $\lambda(T)<\delta(\varepsilon)$ 时，

$$\omega_i=M_i-m_i=|f(\alpha_i)-f(\beta_i)|\le\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\Delta x_i$$

$$=\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$. 即 $\lim\limits_{\lambda(T)\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=0$，

故 $f\in R[a,b]$.

证(II)：不妨设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中单增有界。

(1°) 若 $f(b)=f(a)$，则 $f(x)\equiv C$，$\forall x\in[a,b]\Rightarrow f\in R[a,b]$；

(2°) 若 $f(b)>f(a)$ 则 $f(b)-f(a)>0$，对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$，

则 $\delta(\varepsilon)>0$，且当 $\lambda(T)<\delta(\varepsilon)$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\le\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\lambda(T)\le\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\delta(\varepsilon)$

$$=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\sum_{i=1}^{n}\omega_i=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}[f(x_1)-f(x_0)+\cancel{f(x_2)}-\cancel{f(x_1)}+\cancel{f(x_3)}-\cancel{f(x_2)}+\cdots+f(x_n)-\cancel{f(x_{n-1})}]$$

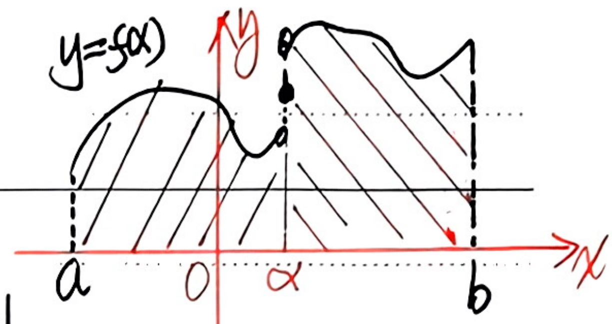
$$=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}[f(x_n)-f(x_0)]=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}[f(b)-f(a)]=\varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{\lambda(T)\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=0$，∴ $f\in R[a,b]$.

证(III)：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 中有界，且仅有一个间断点 $\alpha\in(a,b)$.

(4).

改变f在α点的函数值，不会改变



$\int_a^\alpha f(x)dx$ 与 $\int_\alpha^b f(x)dx$ 的取值。

计算 $\int_a^\alpha f(x)dx$ 时，令 $f(\alpha)=f(\alpha-0)$ 则

$f(x)$ 在 $[a,\alpha]$ 上C，从而 $f\in R[a,\alpha]$，计算 $\int_\alpha^b f(x)dx$ 时，令 $f(\alpha)=f(\alpha+0)$

则 $f(x)$ 在 $[\alpha,b]$ 上C，从而 $f\in R[\alpha,b]$. $\Rightarrow f\in R[a,b]$.

(三). 18个不定积分基本公式：

(1). $\int 0\,dx=C$. (2). $\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$, $(\alpha\neq -1)$. (3). $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$.

(4). $\int e^x dx=e^x+C$. (5). $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$ $(a>0, a\neq 1)$. (6). $\int\cos x\,dx=\sin x+C$.

(7). $\int\sin x\,dx=-\cos x+C$, (8). $\int\sec^2 x\,dx=\tan x+C$, (9). $\int\csc^2 x\,dx=-\cot x+C$.

(10). $\int\sec x\tan x\,dx=\sec x+C$, (11). $\int\csc x\cot x\,dx=-\csc x+C$.

(12). $\int\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C=-\text{arccot}\,x+C$. (14) $\int\ln x\,dx=x\ln x-x+C$

(13). $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C=-\arccos x+C$. (15) $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$.

(16) $\int\frac{dx}{(x-x_1)(x-x_2)}\xrightarrow[(x_1\neq x_2)]{x_1>x_2}\ln\left|\frac{x-x_1}{x-x_2}\right|+C$, $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$.

(17). $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$ $(a>0)$. (18). $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|\sqrt{x^2\pm a^2}+x\right|+C$.

另：$\int\sec x\,dx=\ln|\sec x+\tan x|+C$; $\int\csc x\,dx=\ln|\csc x-\cot x|+C$. (5).

(四) 证明题：

(1). 证明：$\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^6\sin^2 x}dx$ 绝对收敛；

(2). 设 $f\in C^1[a,b]$，则 $\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx=0$；

(3). 证明：$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x|\sin t|dt=\frac{2}{\pi}$；

(4). 证明：若 ~~lim~~ $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=A\in R$，则 $P.V.\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=A$，反之未必。

(5) 证明：$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx=\frac{2\pi}{\sqrt3}$.

证(1)：$\because\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^6\sin^2x}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x}{1+x^6\sin^2x}dx$，而 $a_n\triangleq\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{x\,dx}{1+x^6\sin^2x}>0$

且 $a_n\le\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{(n+1)\pi}{1+n^6\sin^2x}dx=\int_0^{\pi}\frac{(n+1)\pi}{1+n^6\sin^2x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(n+1)\pi}{1+n^6\sin^2x}dx$

$\le2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(n+1)\pi}{\cos^2x+n^6\sin^2x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(n+1)\pi\cos^{-2}x\,dx}{1+(n^3\tan x)^2}=\frac{2\pi}{n^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(n+1)d(\tan x\,n^3)}{1+(n^3\tan x)^2}$

$=\frac{2(n+1)\pi}{n^3}\arctan(n^3\tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2(n+1)}{n^3}\pi\cdot\frac{\pi}{2}=\pi^2\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)$

且 $\sum_{n=1}^{\infty}\pi^2\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)$ con 依正项级数的比较判别法知 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ con

即 $\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^6\sin^2x}dx$ con，而 $\int_0^{+\infty}\left|\frac{x}{1+x^6\sin^2x}\right|dx=\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^6\sin^2x}dx$.

故 $\int_0^{+\infty}\frac{x}{1+x^6\sin^2x}dx$ 绝对con (將 x^6 替换为 x^{2m} ($\forall m>2, m\in R$)，结论不变)

证(2)：$\because f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 C，$\therefore|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上 C $\Rightarrow|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上有最大值 M：$|f(x)|\le M$，$\forall x\in[a,b]$，令 $g(\lambda)=\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx$，则

$g(\lambda)=-\frac{1}{\lambda}\int_a^b f(x)d\cos\lambda x=-\frac{1}{\lambda}f(x)\cos\lambda x\Big|_a^b+\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(x)\cos\lambda x\,dx$

$=\frac{1}{\lambda}(f(a)\cos\lambda a-f(b)\cos\lambda b)+\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(x)\cos\lambda x\,dx \Rightarrow$

$0\le|g(\lambda)|\le\frac{1}{|\lambda|}(|f(a)|+|f(b)|)+\frac{1}{|\lambda|}\int_a^b|f'(x)||\cos\lambda x|dx$

$\le\frac{1}{|\lambda|}(|f(a)|+|f(b)|)+\frac{1}{|\lambda|}\int_a^b M\,dx=\frac{1}{|\lambda|}(|f(a)|+|f(b)|+M(b-a))$

$\longrightarrow 0\ (\lambda\to\infty)$. 依夹逼准则, $\lim\limits_{\lambda\to\infty}|g(\lambda)|=0\Rightarrow$

$\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\,dx=0$, 同理: $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\,dx=0$

证(3): 对充分大的 $x>0$, $\exists n\in N^*$, 使: $n\pi\le x<(n+1)\pi$, 从而

$x\to+\infty\Leftrightarrow n\to\infty$. 且从 $|\sin t|\ge0$ 知: $\int_0^{n\pi}|\sin t|dt\le\int_0^{x}|\sin t|dt\le\int_0^{(n+1)\pi}|\sin t|dt$

而 $\int_0^{n\pi}|\sin t|dt=n\int_0^{\pi}|\sin t|dt=2n$, $\int_0^{(n+1)\pi}|\sin t|dt=2(n+1)\Rightarrow$

$2n\le\int_0^x|\sin t|dt<2(n+1)\Rightarrow\frac{2n}{(n+1)\pi}\le\frac{\int_0^x|\sin t|dt}{x}\le\frac{2(n+1)}{n\pi}$ 且

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{(n+1)\pi}=\frac{2}{\pi}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{n\pi}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\int_0^x|\sin t|dt}{x}=\frac{2}{\pi}$, 即

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x|\sin t|dt}{x}=\frac{2}{\pi}$.

证(4): 已知 $A=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}f(x)dx+\int_0^{+\infty}f(x)dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)dx+$

$\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)dx\xlongequal{令a=-b}\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{-b}^0 f(x)dx+\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)dx$

$=\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\int_{-b}^0 f(x)dx+\int_0^b f(x)dx\right)=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{-b}^b f(x)dx=P.V.\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$.

证(5) $\because \int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{(1+x^{-2})dx}{x^2+1+x^{-2}}$

$=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+3}=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{\sqrt3}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt3}\Big|_\varepsilon^{+\infty}$

$=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{\sqrt3}\left[\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{\varepsilon-\frac{1}{\varepsilon}}{\sqrt3}\right]=\frac{1}{\sqrt3}\left[\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})\right]=\frac{\pi}{\sqrt3}$.

$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx=2\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx=\frac{2\pi}{\sqrt3}$.

(6) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 C，$F(x)=\int_a^b f(t)|x-t|dt$ ($a<x<b$).

证明：$F''(x)=2f(x)$.

证：$\because F(x)=\int_a^x f(t)|x-t|dt+\int_x^b f(t)|x-t|dt$

$=\int_a^x f(t)(x-t)dt+\int_x^b f(t)(t-x)dt$

$=x\int_a^x f(t)dt-\int_a^x tf(t)dt-\int_b^x tf(t)dt+x\int_b^x f(t)dt$

$\therefore F'(x)=1\cdot\int_a^x f(t)dt-\cancel{xf(x)}+\cancel{xf(x)}-\cancel{xf(x)}+1\cdot\int_b^x f(t)+\cancel{xf(x)}$

故 $F''(x)=f(x)+f(x)=2x$.

(7)、设 $f(x)\in C^1[-2a,2a]$，证明：$\lim\limits_{a\to0^+}\frac{1}{4a^2}\int_{-a}^a[f(t+a)-f(t-a)]dt=f'(0)$.

证(法1)：由积分中值定理：$\int_{-a}^a[f(t+a)-f(t-a)]dt=[f(\xi+a)-f(\xi-a)]2a$,

$-a<\xi<a$. $\lim\limits_{a\to0^+}\frac{1}{4a^2}\int_{-a}^a[f(t+a)-f(t-a)]dt=\lim\limits_{a\to0^+}\frac{1}{4a^2}[f(\xi+a)-f(\xi-a)]2a$

微分中值定理

$=\lim\limits_{a\to0^+}\frac{1}{4a^2}f'(\eta)(2a)^2=\lim\limits_{a\to0^+}f'(\eta)$，$\xi-a<\eta<\xi+a$.

(8).

当 $a\to 0^+$ 时，$\xi\to 0 \Rightarrow \eta\to 0 \Rightarrow \lim\limits_{\eta\to 0} f'(\eta)=f'(0)$

故 $\lim\limits_{a\to 0^+}\dfrac{1}{4a^2}\int_{-a}^{a}[f(t+a)-f(t-a)]dt=\lim\limits_{\eta\to 0}f'(\eta)=f'(0)$.

证法(二)：$\because \int_{-a}^{a}f(t+a)dt \xlongequal[\text{则 } dt=du]{\text{令 } t+a=u} \int_0^{2a}f(u)du$. $\int_{-a}^{a}f(t-a)dt$

$\xlongequal[dt=dv]{t-a=v} \int_{-2a}^{0}f(v)dv=-\int_0^{-2a}f(v)dv$

$\therefore \lim\limits_{a\to 0^+}\dfrac{1}{4a^2}\int_{-a}^{a}[f(t+a)-f(t-a)]dt=\lim\limits_{a\to 0^+}\dfrac{1}{4a^2}\left[\int_0^{2a}f(u)du+\int_0^{-2a}f(u)du\right]$

$\xlongequal{\text{洛必达法则}} \lim\limits_{a\to 0^+}\dfrac{1}{8a}[f(2a)\cdot 2+f(-2a)(-2)]=\lim\limits_{a\to 0^+}\dfrac{1}{4a}[f(2a)+f(-2a)(-1)]$

$\xlongequal{\text{再洛必达法则}} \lim\limits_{a\to 0^+}\dfrac{1}{4}[f'(2a)\cdot 2+f'(-2a)(+2)]=\dfrac{1}{4}[2f'(0)+2f'(0)]=f'(0)$.

证法(三)：由微分中值定理：$f(t+a)-f(t-a)=f'(t-a+\theta 2a)2a,\ \theta\in(0,1)$

$\lim\limits_{a\to 0^+}\dfrac{1}{4a^2}\int_{-a}^{a}[f(t+a)-f(t-a)]dt=\lim\limits_{a\to 0^+}\dfrac{1}{4a^2}\int_{-a}^{a}f'(t-a+2a\theta)2a\,dt$

$\xlongequal{\text{积分中值定理}} \lim\limits_{a\to 0^+}\dfrac{1}{4a^2}f'(\xi-a+2a\theta)(2a)^2=\lim\limits_{a\to 0^+}f'(\xi-a+2a\theta)$

且 $-a<\xi<a$，当 $a\to 0^+$ 时，$\xi\to 0$，$\xi-a+2a\theta\longrightarrow 0$

故 $\lim\limits_{a\to 0^+}\dfrac{1}{4a^2}\int_{-a}^{a}[f(t+a)-f(t-a)]dt=\lim\limits_{a\to 0^+}f'(\xi-a+2a\theta)=f'(0)$.

(五)、定积分的十大性质，特别是积分中值定理：若 $f\in C[a,b]$，则必有 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)(b-a)=\int_a^b f(x)dx$. 其中，$f(\xi)=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ 称之为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分平均值。

(9).