第45讲：无穷级数复习与小结(II)

(一). 证明：$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(x-1)$ 在$[0,1]$中逐点、绝对收敛且内闭一致con，但$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(x-1)$ 在$[0,1]$中非一致收敛。

证(1) 对$\forall x_0\in[0,1]$，令 $|(x_0-1)|+|x_0(x_0-1)|+|x_0^2(x_0-1)|+\cdots+|x_0^{n-1}(x_0-1)|=S_n(x_0)$ 则 $S_n(x_0)=1-x_0+x_0(1-x_0)+x_0^2(1-x_0)+\cdots+x_0^{n-1}(1-x_0)=1-x_0^n$

当$x_0=0$时，$S_n(0)\equiv1$；当$x_0=1$时，$S_n(1)\equiv0$，$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}S_n(0)=1$，$\lim_{n\to\infty}S_n(1)=0$，当$0<x_0<1$时，$\lim_{n\to\infty}S_n(x_0)=\lim_{n\to\infty}(1-x_0^n)=1$.

即$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(x-1)$ 在$[0,1]$中逐点、绝对收敛；

证(2)：对$\forall[a,b]\subset(0,1)$，由$|u_n(x)|=|x^{n-1}(x-1)|\le|x|^{n-1}<b^{n-1}$，$\forall x\in[a,b]$，$\forall n\in N^*$，且$\sum_{n=1}^{\infty}b^{n-1}$ con. 依优级数判法，$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(x-1)$ 在$[a,b]$中一致收敛，即$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(x-1)$在$[0,1]$中内闭一致con；

证(3). 用反证法证明$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(x-1)$ 在$[0,1]$中非一致con：

令 $A_n(x)=1\cdot(x-1)+x(x-1)+x^2(x-1)+\cdots+x^{n-1}(x-1)$，则 $A_n(x)=x^n-1$，

$\Rightarrow A_n(0)\equiv-1$，$A_n(1)\equiv0$，当$x\in(0,1)$时，$\lim_{n\to\infty}A_n(x)=0-1=-1$.

(1).

设 $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(x-1)=A(x)$，$x\in[0,1]$. 则 $A(x)=\lim_{n\to\infty}A_n(x)=\begin{cases}-1, & 0\le x<1\\ 0, & x=1\end{cases}$

若 $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(x-1)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 $A(x)$，则由 $a_n(x)=x^{n-1}(x-1)$ 在 $[0,1]$ 上都连续知，$A(x)$ 也应在 $[0,1]$ 上连续。但现在 $A(x)$ 在 $x=1$ 处间断（$\because \lim_{x\to 1^-}A(x)=\lim_{x\to 1^-}(-1)=-1\neq A(1)=0$）. 故 $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(x-1)$ 虽在闭区间上逐点绝对收敛且内闭一致con，但在 $[0,1]$ 中非一致con.

(三) 设 $f\in C[a,b]$，且 $F_0(x)=\int_a^x f(t)dt$，$F_n(x)=\int_a^x F_{n-1}(t)dt$ $(n\ge 1)$.

证明：$\sum_{n=0}^{\infty}F_n(x)$ 在 $[a,b]$ 中一致con；令 $\sum_{n=0}^{\infty}F_n(x)=S(x)$，$x\in[a,b]$.

试求出 $S(x)$ 的表达式。(用已知函数 $f(x)$ 表示)

证(1°)：$\because |F_0(x)|=\left|\int_a^x f(t)dt\right|\le\int_a^x|f(t)|dt\le\int_a^x Mdt=M(x-a)\le M(b-a)$

M 是 $|f(t)|$ 在 $[a,b]$ 上的最大值。$\because |F_1(x)|=\left|\int_a^x F_0(t)dt\right|\le\int_a^x|F_0(t)|dt$

$\le\int_a^x M(t-a)dt=\frac{M}{2!}(x-a)^2\le\frac{M}{2!}(b-a)^2$；$|F_2(x)|=\left|\int_a^x F_1(t)dt\right|\le\int_a^x|F_1(t)|dt$

$\le\int_a^x\frac{M}{2!}(t-a)^2dt=\frac{M}{3!}(x-a)^3\le\frac{M}{3!}(b-a)^3$，…，$|F_{n-1}(x)|\le\frac{M}{n!}(b-a)^n$，$\forall n\in N^*$

$\forall x\in[a,b]$. 且 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{M}{n!}(b-a)^n=Me^{b-a}$. 依优级数判别法，

$\sum_{n=0}^{\infty}F_n(x)$ 在 $[a,b]$ 中一致con.

(2)

解(2). 利用一致con的分析性质(3), $S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_n'(x)$

$=F_0'(x)+F_1'(x)+F_2'(x)+F_3'(x)+\cdots+F_n'(x)+\cdots=f(x)+F_0(x)+F_1(x)+F_2(x)+\cdots$

$=f(x)+S(x)$ 且 $S(a)=0$. 解ODE初值问题: $\begin{cases} S'(x)-S(x)=f(x) \\ S(a)=0. \end{cases}$

此题是一阶线性ODE, $p(x)=-1$, $Q(x)=f(x)$. 方程两边同乘积分

因子 $e^{\int p(x)dx}=e^{\int(-1)dx}=e^{-x}$: $e^{-x}S'(x)-S(x)e^{-x}=f(x)e^{-x}\Rightarrow$

$(S(x)e^{-x})'=f(x)e^{-x}\Rightarrow\int_0^{S(x)}(S(x)e^{-x})'dx=\int_a^x f(x)e^{-x}dx\Rightarrow$

$S(x)e^{-x}\Big|_0^{S(x)}=S(x)e^{-x}=\int_a^x f(t)e^{-t}dt\Rightarrow S(x)=e^{x}\int_a^x f(t)e^{-t}dt$

为所求的$S(x)$之表达式。

三. (1) 证明: 当$\alpha>1$时, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^\alpha}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^\alpha}$ 在$(-\infty,+\infty)$中绝对、

一致con.

(2) 证明: 当$0<\alpha\le1$时, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^\alpha}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^\alpha}$ 在$[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$中条件

收敛且一致收敛。

证(1): $\because\left|\frac{\cos nx}{n^\alpha}\right|\le\frac{1}{n^\alpha}$, $\left|\frac{\sin nx}{n^\alpha}\right|\le\frac{1}{n^\alpha}$, $\forall n\in N^*$, $\forall x\in(-\infty,+\infty)$, 且

(3).

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ 当 $\alpha>1$ 时 con. 依一致 con 的优级数判法，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^\alpha}$，

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^\alpha}$ 当 $\alpha>1$ 时在 $(-\infty,+\infty)$ 中绝对 con 且一致 con. 并且

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos nx}{n^\alpha}\right|$，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin nx}{n^\alpha}\right|$ 也在 $(-\infty,+\infty)$ 中一致 con.

论(2)：当 $0<\alpha\le 1$，$x\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$ 时，在 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^\alpha}$ 中，设 $\begin{cases}a_n(x)=\cos nx\\ b_n(x)=\frac{1}{n^\alpha}\end{cases}$

则 $|A_n(x)|=|\cos 1x+\cos 2x+\dots+\cos nx|=\left|\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\right|\le\frac{2}{2|\sin\frac{x}{2}|}$

$\le\frac{1}{\sin\frac{\pi}{12}}\triangleq M$，$\forall n\in N^*$，$\forall x\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$ 且 $M=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{12}}>0$ 与 x 无关.

即 $A_n(x)$ 在 $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$ 中一致有界，且 $b_n(x)=\frac{1}{n^\alpha}\downarrow 0$ $(n\to\infty)$，$\forall x\in[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$

即 $b_n(x)$ 在 $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$ 中单调减且一致趋零. 依一致 con 的

Dirichlet 判法，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^\alpha}$ 当 $0<\alpha\le 1$ 时在 $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$ 中

一致 con. 从而在 $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$ 中逐点 con.

而从 $\left|\frac{\cos nx}{n^\alpha}\right|\ge\frac{\cos^2 nx}{n^\alpha}=\frac{1+\cos 2nx}{2n^\alpha}\ge 0$ 且 $0<\alpha\le 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ div

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n(2x)}{n^\alpha}$ 在 $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$ 中 con 知，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos 2nx}{2n^\alpha}$ div.

再依比较判法知，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos nx}{n^\alpha}\right|$ 在 $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$ 中 div. $(0<\alpha\le 1)$.

(4).

注：当$0<\alpha\le 1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^\alpha}$在$[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$中一致con，但却不存在对应的优级数。即有优级数的函数项级数必一致con，但一致con的级数却未必有优级数)。

(四)、证明：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(ne^n)^x}$在$[0,+\infty)$中一致con.

证：设$a_n(x)=\frac{x^2}{e^{nx}}$，$b_n(x)=\frac{1}{n^x}$，$x\in[0,+\infty)$，且$\frac{x^2}{(ne^n)^x}=a_n(x)\cdot b_n(x)$

且利用$e^{nx}=1+nx+\frac{(nx)^2}{2!}+R_2(x)>\frac{(nx)^2}{2!}$，$\forall x\in[0,+\infty)\Rightarrow e^{-nx}<\frac{2}{n^2x^2}$

$\Rightarrow|a_n(x)|=|e^{-nx}x^2|\le\left|\frac{2}{n^2x^2}\right|\cdot x^2=\frac{2}{n^2}$，$\forall x\in[0,+\infty)$，$\forall n\in N^*$且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$ con.

有一致con的优级数判法，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$在$[0,+\infty)$中一致con；

另外，$b_n(x)=\frac{1}{n^x}$在$[0,+\infty)$中关于n单减，且对$\forall x\in[0,+\infty)$

$\exists M=1>0$，M与x无关，$|b_n(x)|=\left|\frac{1}{n^x}\right|\le\frac{1}{n^0}=M=1$，即$b_n(x)$在$[0,+\infty)$中一致有界，再有一致con的Abel判法，知$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(ne^n)^x}$在$[0,+\infty)$中一致con。同样可证，对$\forall m\ge 2$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^m}{(ne^n)^x}$在$[0,+\infty)$中仍一致con，其中$m\in R^+$且$m\in N^*$。

(五)、设$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为$R$（$R>0$），且$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S(x)$，

$x\in(-R,+R]$，则 $S(x)$ 在 $x=+R$ 处左连续：$\lim\limits_{x\to R^-}S(x)=S(R)$.

证：已知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ con. 将 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ 看作函数项级数，它在任意区间中都一致con（证明如下：设 $S_n(x)=a_0+a_1R+a_2R^2+\cdots+a_nR^n$，$\forall x\in[a,b]$，$S(R)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=S(R)\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon)\in N^*$，对 $\forall n>N(\varepsilon)$，$|S_n(x)-S(R)|<\varepsilon$ 恒成立，故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ 在 $[a,b]$ 中一致con于 $S(R)$.）

而 $a_nx^n=(a_nR^n)(\frac{x}{R})^n$. 令 $U_n(x)=a_nR^n$，$V_n(x)=(\frac{x}{R})^n$，$x\in[0,R]$.

则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}U_n(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ 在 $[0,R]$ 中一致con，$V_n(x)=(\frac{x}{R})^n$ 在 $[0,R]$ 中关于 n 单减且 $\exists M=1>0$，使 $\forall x\in[0,R]$，$|V_n(x)|=|\frac{x}{R}|^n\le1=M$，即 $V_n(x)$ 在 $[0,R]$ 中单减且一致有界，依一致con的Abel判定，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}U_n(x)V_n(x)$ $=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $[0,R]$ 中一致con，且 a_nx^n 在 $[0,R]$ 中C，$\forall n\in N$. 故和函数 $S(x)$ 在 $[0,R]$ 中也C，$\Rightarrow S(x)$ 在点 R 处左C。

(六). 求下列幂级数的收敛半径R，收敛区间与收敛域I.

(1). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$，(2). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}(x+1)^{n+1}$，(3). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{3n-2}}{3n-2}$.

解(1). 设 $a_n(x)=\frac{x^n}{n(n+1)}$ 则从 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right|=|x|=\rho(x)<1 \Rightarrow R=1$.

即收敛半径 $R=1$，收敛区间：$(-R,R)=(-1,1)$. 当 $x=\pm R=\pm1$ 时.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm1)^n}{n(n+1)}$ 绝对 con. ($\left|\frac{(\pm1)^n}{n(n+1)}\right|=\frac{1}{n(n+1)}\sim\frac{1}{n^2}$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ con)

故(1)的收敛域 $I=[-1,+1]$.

解(2). 设 $a_n(x)=\frac{n^2}{3^n}(x+1)^{n+1}$，则从 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}\cdot\frac{(x+1)^n}{n^2}\cdot\frac{3^n}{(x+1)^{n+1}}\right|$

$=\frac{|x+1|}{3}=\rho(x)<1 \Rightarrow |x+1|<3 \Rightarrow$ 收敛半径 $R=3$. $\Rightarrow$ 收敛区间为

$-3<x+1<3$ 即 $(-4,2)$. 当当 $x=-4$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}(-4+1)^{n+1}=\frac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n^2$

div；当 $x=2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}(2+1)^{n+1}=\frac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2$ div，从而收敛域 $I=(-4,2)$.

解(3)：设 $a_n(x)=\frac{(-1)^{n+1}x^{3n-2}}{3n-2}$，则从 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right|=|x|^3=\rho(x)<1 \Rightarrow$

$|x|<1 \Rightarrow R=1$，收敛区间为 $(-1,+1)$. 当 $x=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}$ 为收敛

的交错级数；$x=-1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-1)^{3n-2}}{3n-2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{3n-2}$ 而 $\frac{1}{3n-2}\sim\frac{1}{3n}$

且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}$ div. 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{3n-2}$ div. 故收敛域 $I=(-1,+1]$.

(2). 设方程：$y+\lambda\sin y=x$ $(\lambda\neq-1)$ 在 $x=0$ 附近确定了一个隐

函数 $y(x)$，求 $y(x)$ 的幂级数展开式中的前四项。

解(1)：求出 $y(x)=y(0)+y'(0)x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\cdots$ 即可.

(7).

令 $y(0)+\lambda\sin y(0)=0 \Rightarrow y(0)=0$，在 $y(x)+\lambda\sin y(x)=x$ 两边对 x

求导：$y'(x)+\lambda y'(x)\cos y(x)=1$，令 $x=0 \Rightarrow y'(0)+\lambda y'(0)\cos 0=1 \Rightarrow$

$y'(0)=\frac{1}{1+\lambda}$；在 $y'(x)+\lambda y'(x)\cos y(x)=1$ 两边对 x 求导：

$y''(x)+\lambda y''(x)\cos y(x)-\lambda(y'(x))^2\sin y(x)=0$，令 $x=0 \Rightarrow$

$y''(0)+\lambda y''(0)\cos 0-\lambda(y'(0))^2\sin 0=0 \Rightarrow y''(0)(1+\lambda)=0 \Rightarrow y''(0)=0$。

$y''(x)+\lambda y''(x)\cos y(x)-\lambda(y'(x))^2\sin y(x)=0$ 两边对 x 再求导：

$y^{(3)}(x)+\lambda y^{(3)}(x)\cos y(x)-\lambda(y''(x))^2\sin y(x)-\lambda 2y'(x)y''(x)\sin y(x)-\lambda(y'(x))^3\cos y(x)=0$

以 $x=0$ 代入：$y^{(3)}(0)+\lambda y^{(3)}(0)-\lambda(y''(0))^2\sin 0-2\lambda y'(0)y''(0)\sin 0-\lambda(y'(0))^3=0$

$\Rightarrow y^{(3)}(0)(1+\lambda)=\lambda\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^3 \Rightarrow y^{(3)}(0)=\frac{\lambda}{(1+\lambda)^4} \Rightarrow$

$y(x)=0+\frac{1}{1+\lambda}x+0+\frac{\lambda}{(1+\lambda)^4}x^3+\cdots \quad x\in U(0,\delta),\ \delta>0$.

(3). 证明：(1) $\ln n^n \sim \ln n!$；(2). $C_{2n}^n \sim \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}$，(3). $\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}$.
$(n\to\infty)$.

证(1)：利用 stirling 公式：$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}$，$\theta_n\in(0,1)$

$\Rightarrow \ln n!=\ln\sqrt{2\pi}+\ln\sqrt{n}+\ln n^n-\ln e^n+\frac{\theta_n}{12n}$

$=\ln\sqrt{2\pi}+\frac{1}{2}\ln n+n\ln n-n+\frac{\theta_n}{12n}$

$$\frac{\ln n!}{n\ln n}=\frac{\ln\sqrt{2\pi}+\frac{1}{2}\ln n+n\ln n-n+\frac{\theta_n}{12n}}{n\ln n}\longrightarrow 1\ (n\to\infty).$$

$\therefore \ln n^n = n\ln n \sim \ln n!\ (n\to\infty)$.

证(2)：由 $C_{2n}^{n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\frac{\sqrt{2\pi 2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}e^{\frac{\theta_{1n}}{24n}}}{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}e^{\frac{\theta_{2n}}{12n}}\right)^2}$，$\theta_{1n},\theta_{2n}\in(0,1)$

$$=\frac{4^n}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}e^{\frac{\theta_{1n}}{24n}-\frac{\theta_{2n}}{6n}}\Rightarrow\frac{C_{2n}^{n}}{\frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}}=e^{\frac{\theta_{1n}}{24n}-\frac{\theta_{2n}}{6n}}\longrightarrow e^0=1\ (n\to\infty)$$

$\therefore C_{2n}^{n}\sim\frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}$，$(n\to\infty)$.

证(3)：由 $n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}$，$\theta_n\in(0,1)\Rightarrow$

$$\sqrt[n]{n!}=(\sqrt{2\pi})^{\frac{1}{n}}\left(n^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{n}{e}e^{\frac{\theta_n}{12n^2}}\Rightarrow\frac{\sqrt[n]{n!}}{\frac{n}{e}}=(\sqrt{2\pi})^{\frac{1}{n}}\left(n^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\theta_n}{12n^2}}\xrightarrow{n\to\infty}$$

$1\times 1^{\frac{1}{2}}\times 1=1$，故 $\sqrt[n]{n!}\sim\frac{n}{e}$ $(n\to\infty)$.

注：n充分大时，$n^n>>n!>>a^n>>n^\alpha>>(\ln n)^m$ $(\forall a>1,\alpha>0,m>0)$

x充分大时：$x^x>>a^x>>x^\alpha>>(\ln x)^m$ $(\forall a>1,\alpha>0,m>0,x>0)$

注：$f(x)$ 在 x_0 处的Taylor级数：$f(x)\sim\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f^{(m)}(x_0)(x-x_0)^m}{m!}$，由 $f(x)$ 及 x_0 所完全唯一确定，无论用何种方法得到 $f(x)$ 在 x_0 处的Taylor级数，形式是唯一的。

第45讲 附件：

(I). $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在收敛域 I 中一致 con：$\lim_{n\to\infty} S_n(x) \xlongequal{\text{一致}} S(x),\ x\in I$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N(\varepsilon)\in N^*$，对 $\forall n\geq N(\varepsilon)$，$|S_n(x)-S(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$ 恒成立，$\forall x\in I \Rightarrow$

$\beta_n \triangleq \sup_{x\in I}|S_n(x)-S(x)|\leq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\beta_n=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|S_n(x)-S(x)|=0$.

即 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 I 中一致 con 的充分必要条件为：

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|S_n(x)-S(x)|=0 \qquad (*_1)$$

(II) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在收敛域 I 中一致 con 的 Cauchy 准则：$\forall\varepsilon>0, \exists N(\varepsilon)\in N^*$

对 $\forall n\geq N(\varepsilon)$，$\forall p\in N^*$，$|a_{n+1}(x)+\cdots+a_{n+p}(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$ 恒成立，$\forall x\in I$，当 $p=1$ 时

也成立 $|a_{n+1}(x)|<\frac{\varepsilon}{2}, \forall x\in I \Rightarrow \alpha_n \triangleq \sup_{x\in I}|a_{n+1}(x)|\leq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$.

即 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 I 中一致 con 的必要条件为：

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|a_{n+1}(x)|=0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|a_n(x)|=0 \qquad (*_2).$$

例1. $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(x-1)$ 在收敛域 $I=[0,1]$ 中收敛于和函数：

$S(x)=\begin{cases}-1, & 0\leq x<1\\ 0, & x=1.\end{cases}$ 而 $S_n(x)=1(x-1)+x(x-1)+x^2(x-1)+\cdots+x^{n-1}(x-1)$

$=x^n-1$.

对 $\forall x_0\in(0,1)$，$\sqrt[n]{x_0}\in(0,1)$，$\forall n\in N^*$，$|S_n(\sqrt[n]{x_0})-S(\sqrt[n]{x_0})|$

$=(\sqrt[n]{x_0})^n-1-(-1)=x_0<1 \Rightarrow \beta_n=\sup\limits_{x\in I}|S_n(x)-S(x)|=\sup\limits_{0<x_0<1}x_0=1 \not\to 0$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}(x-1)$ 在 $I=[0,1]$ 上逐点绝对con，但不一致con.

对比：$S(x)\in[a,b]$ 上 C，则 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 中必一致 C。

例2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上逐点绝对con（$\because e^{nx}=1+nx+\frac{(nx)^2}{2!}+\frac{(nx)^3}{3!}+R_3(x)>\frac{(nx)^3}{3!}$，$\therefore e^{-nx}<\frac{6}{n^3x^3}\Rightarrow ne^{-nx}<\frac{6}{n^2x^3}$

且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n^2x^3}$ con，依比较法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 中逐点绝对con）

但是，由于 $|a_n(\frac{1}{n})|=ne^{-n\frac{1}{n}}=ne^{-1}$，$\frac{1}{n}\in(0,+\infty)$. 因此，$I=(0,+\infty)$ 时

$\alpha_n=\sup\limits_{x\in I}|a_n(x)|>a_n(\frac{1}{n})=ne^{-1}\not\to 0\ (n\to\infty)$.

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 中不一致con。

但是，对 $\forall \alpha>0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $[\alpha,+\infty)$ 中均一致con。

证：$\because |a_n(x)|=ne^{-nx}\le\frac{6}{n^2x^3}\le\frac{6}{n^2\alpha^3}$，$\forall x\in[\alpha,+\infty)$，$\forall n\in N^*$ 且

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n^2\alpha^3}$ con. 依优级数判法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $[\alpha,+\infty)$ 中均一致con.

(2).