第44讲：级数的应用与复习(I)

(一) Euler(欧拉)公式：$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，$\forall\theta\in\mathbb{R}$，$i^2=-1$ 的推导。

(1°) 令 $z_n=a_n+ib_n$，则 $\sum_1^\infty z_n$ con $\Longleftrightarrow \sum_1^\infty a_n$，$\sum_1^\infty b_n$ 皆 con.

(2°) 若 $\sum_1^\infty |z_n|$ con，则 $\sum_1^\infty z_n$ 必 con，称之为绝对 con.

利用：$0\le|a_n|\le|z_n|=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$，$0\le|b_n|\le|z_n|=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ 及 $\sum_1^\infty|z_n|$ con $\Rightarrow$

$\sum_1^\infty a_n$，$\sum_1^\infty b_n$ 皆绝对 con $\Rightarrow \sum_1^\infty z_n$ 绝对 con。

(3°) 对 $\forall z\in\mathbb{C}$ (复数集)，$\sum_{n=0}^\infty \frac{|z|^n}{n!}=e^{|z|}\Rightarrow \sum_{n=0}^\infty\frac{z^n}{n!}=e^z$，$\forall z\in\mathbb{C}$

(4°) 取 $z=i\theta$，$\theta\in\mathbb{R}$，则 $\sum_{n=0}^\infty\frac{(i\theta)^n}{n!}=e^{i\theta}=1+\frac{(i\theta)^1}{1!}+\frac{(i\theta)^2}{2!}+\frac{(i\theta)^3}{3!}+\frac{(i\theta)^4}{4!}+\cdots$

$=\left(1+\left(-\frac{\theta^2}{2!}\right)+\frac{\theta^4}{4!}-\frac{\theta^6}{6!}+\cdots\right)+i\left(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\frac{\theta^7}{7!}+\cdots\right)=\cos\theta+i\sin\theta$.

利用 Euler 公式：$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$. 可推导出所有的三角公式。

(二). Wallis(瓦里斯)公式：$\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2$

(1°) 利用：$\sin^{2n+1}x<\sin^{2n}x<\sin^{2n-1}x$，$\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})\Rightarrow$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}x\,dx$

$$\Rightarrow \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\times 1 < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\times\frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\times 1 \Longleftrightarrow$$

$$\frac{1}{(2n+1)}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 < \frac{\pi}{2} < \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\frac{1}{2n},\ 令\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{2n+1}\left(\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \\ b_n=\dfrac{1}{2n}\left(\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \end{cases}$$

则从 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{4n^2+8n+4}{4n^2+8n+3}>1 \Rightarrow a_n\uparrow$ 且 $a_n<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \{a_n\}$ conv，

从 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{4n^2+4n}{4n^2+4n+2(n+1)}<1 \Rightarrow b_n\downarrow$ 且 $b_n>\frac{\pi}{2}$，$\therefore \{b_n\}$ conv.

且从 $a_n<\frac{\pi}{2}<b_n$ 及 $0<\frac{\pi}{2}-a_n<b_n-a_n=\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\frac{1}{2n(2n+1)}\to 0$

由夹逼准则有 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-a_n\right)=0 \Rightarrow a_n\to\frac{\pi}{2}$，$b_n\to\frac{\pi}{2}\ (n\to\infty)$.

(三) Stirling(斯特林)公式：$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}$，$\theta_n\in(0,1)$

1°) 当 $x\in(-1,1)$ 时，有 $\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\right)$

$-\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\right)=2x\left(1+\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+\cdots\right)$

取 $x=\frac{1}{1+2n}$，则 $\frac{1+x}{1-x}=\left(1+\frac{1}{n}\right)$，$2x=\frac{2}{1+2n}$ 从而有

$$\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}=\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{3(2n+1)^2}+\frac{1}{5(2n+1)^4}+\cdots\Rightarrow$$

$$1<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}<1+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^4}+\frac{1}{(2n+1)^6}+\cdots\right)=1+\frac{1}{12n(n+1)}$$

$$\Rightarrow e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}<e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}} \Longleftrightarrow 1<\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e}<e^{\frac{1}{12n(n+1)}}$$

(2).

(2°) 设 $a_n = \frac{n!\,e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ 则 $1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}}}{e} < e^{\frac{1}{12n(n+1)}}$

一方面，$a_n > a_{n+1}$ 且 $a_n > 0 \Rightarrow \{a_n\}$ 收敛，令 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 另一方面

从：$a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a_{n+1} e^{-\frac{1}{12(n+1)}}$ 知 $a_n e^{-\frac{1}{12n}} \uparrow a$，即有

$$a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a < a_n \Rightarrow e^{-\frac{1}{12n}} < \frac{a}{a_n} < 1 \Leftrightarrow 1 < \frac{a_n}{a} < e^{\frac{1}{12n}}$$

$0 < \ln\frac{a_n}{a} < \frac{1}{12n} \Rightarrow 0 < \frac{\ln\frac{a_n}{a}}{\frac{1}{12n}} < 1$，令 $\frac{\ln\frac{a_n}{a}}{\frac{1}{12n}} = \theta_n$.

则 $\theta_n \in (0,1)$ 且 $a_n = a e^{\frac{\theta_n}{12n}} = \frac{n!\,e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \Rightarrow$

$$n! = a\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}},\quad (2n)! = a\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} e^{\frac{\theta_{2n}}{24n}}. \quad (*1)$$

(3°) 利用 $\frac{\pi}{2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\frac{(2^n n!)^4}{((2n)!)^2}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\frac{2^{4n}\left(a\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}\right)^4}{\left(a\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} e^{\frac{\theta_{2n}}{24n}}\right)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{na^2}{2(2n+1)}\frac{e^{\frac{\theta_n}{3n}}}{e^{\frac{\theta_{2n}}{12n}}}$$

$= \frac{1}{4}a^2 \Rightarrow a = \sqrt{2\pi}$

(4°). $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}$，$\theta_n \in (0,1)$.

(四). 当 n 充分大时，证明：(1) $\ln n! \sim \ln n^n$，(2). $C_{2n}^n \sim \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}$

(3). $\sqrt[n]{n!}\,e \sim n$.

(3).

(五) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)v_n(x)$ 在 I 上一致 con 的 Abel 判法：若

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上一致 con；

(2) $\{v_n(x)\}$ 在 I 上关于 n 单调且一致有界，$|v_n(x)|\le M$，M 与 x 无关，

则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)v_n(x)$ 在 I 上一致 con.

当数项级数 $\sum a_n$ con 时，将之视为函数项级数，则之在任意区间上都是一致 con 的。

(1) 设 $\sum_1 a_n$ con，证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{e^{nx}}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致 con；

(2) 设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S(x)$，$x\in[-R,R)$ 或 $x\in(-R,R]$，$(R>0)$ R 是收敛半径。

则 S(x) 在 $x=-R$ 处右 C 或在 $x=R$ 处左 C，即有

$S(-R)=\lim\limits_{x\to-R^+}S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(-R)^n$，或 $S(R)=\lim\limits_{x\to R^-}S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n$

(六) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)v_n(x)$ 在 I 一致 con 的 Dirichlet 判法：若

① $S_n(x)=u_1(x)+\cdots+u_n(x)$ 在 I 上一致有界：$|S_n(x)|\le M$，M 与 x 无关，

② $\{v_n(x)\}$ 在 I 上关于 n 单减且一致趋零，

则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)v_n(x)$ 在 I 上一致 con.

(1) 证明：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^{\alpha}}$ 在 $[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$ 上当 $\alpha>1$ 时绝对收敛且一致收敛；

(2°) 当 $0<\alpha\leq 1$ 时条件con且一致con；当 $\alpha<0$ 时，div。

(6). 设 $f(x)\in C[a,b]$. $F_0(x)=\int_a^x f(u)du$, $F_n(x)=\int_a^x F_{n-1}(u)du$, $n\in N^*$,

$x\in[a,b]$. 证明：(1) $\sum_{n=0}^{\infty}F_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致con；(2) 令

$\sum_{n=0}^{\infty}F_n(x)=S(x)$, $x\in[a,b]$, 则 $\begin{cases} S'(x)-S(x)=f(x) \\ S(a)=0 \end{cases}$.

(3) 用 $f(x)$ 表示 $S(x)$。

(7). (1°) 若 $\sum_1^{\infty}a_n$, $\sum_1^{\infty}b_n$ 均con，则 $\sum_1^{\infty}(c_1a_n+c_2b_n)$ 必con，$\forall c_1,c_2\in R$.

(2°) 若 $\sum_1^{\infty}a_n$, $\sum_1^{\infty}b_n$ 均abs con，则 $\sum_1^{\infty}(c_1a_n+c_2b_n)$ abs con，$\forall c_1,c_2\in R$,

(3°) 若 $\sum_1^{\infty}a_n$ con，$\sum_1^{\infty}b_n$ div，则 $\sum_1^{\infty}(a_n\pm b_n)$ 必div；

(4°). $\sum_1^{\infty}a_n$ div，$\sum_1^{\infty}b_n$ div，则 $\sum_1^{\infty}(a_n\pm b_n)$ 未必div，

(5°) $\sum_1^{\infty}a_n$ 条件con，$\sum_1^{\infty}b_n$ abs con，则 $\sum_1^{\infty}(a_n\pm b_n)$ 条件con；

(6°) $\sum_1^{\infty}a_n$ 条件con，$\sum_1^{\infty}b_n$ 条件con，则 $\sum_1^{\infty}(a_n\pm b_n)$ 未必条件con.

(7°). 若 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n$ 分别在 I_1, I_2 上一致con，$I_1\subset I_2$,

则 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)(x-x_0)^n$ 在 I_1 上一致con。

证(四)/(1). 从 $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}$, $\theta_n \in (0,1)$ $\Longleftrightarrow$

$$\ln n! = \ln\sqrt{2\pi} + \ln\sqrt{n} + \ln n^n - \ln e^n + \frac{\theta_n}{12n}$$
$$= \ln\sqrt{2\pi} + \frac{1}{2}\ln n + n\ln n - n + \frac{1}{12n}\theta_n.$$

$$\therefore \frac{\ln n!}{\ln n^n} = \frac{\ln n!}{n\ln n} = \frac{n\ln n + \frac{1}{2}\ln n - n + \ln\sqrt{2\pi} + \frac{\theta_n}{12n}}{n\ln n} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

即 $\ln n! \sim \ln n^n \ (n\to\infty)$. (注意：$n^n >> n!$ (n充分大))

证(四)/(2): $\because C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{\sqrt{2\pi 2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} e^{\frac{\theta_{1n}}{24n}}}{\left(\sqrt{2\pi n}\right)^2\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} e^{\frac{\theta_{2n}}{6n}}}$

$$= \frac{4^n e^{\frac{\theta_{1n}}{24n} - \frac{\theta_{2n}}{6n}}}{\sqrt{\pi n}}, \quad \theta_{1n}, \theta_{2n} \in (0,1).$$

$$\therefore \frac{C_{2n}^n}{\frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}} = e^{\frac{\theta_{1n}}{24n} - \frac{\theta_{2n}}{6n}} \xrightarrow{n\to\infty} e^0 = 1.$$

即 $C_{2n}^n \sim \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}} \ (n\to\infty)$.

证(四)/(3). $\because n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}$, $\therefore \sqrt[n]{n!} = (\sqrt{2\pi})^{\frac{1}{n}}(\sqrt{n})^{\frac{1}{n}}\frac{n}{e}e^{\frac{\theta_n}{12n^2}}$

$$\Longrightarrow \frac{\sqrt[n]{n!}}{\frac{n}{e}} = (\sqrt{2\pi})^{\frac{1}{n}}\left(n^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\theta_n}{12n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} 1\times 1^{\frac{1}{2}}\times e^0 = 1.$$

即 $\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e} \ (n\to\infty)$.

证(五)/(1). 令 $\begin{cases} u_n(x) = a_n \\ v_n(x) = \frac{1}{e^{nx}} \end{cases}$, $x\in[0,+\infty)$. 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 在任意区间上均一致con.

即$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$看作函数项级数，在$[0,+\infty)$中一致con，且在$[0,+\infty)$上，

$v_n(x)=\frac{1}{e^{nx}}=\left(\frac{1}{e^x}\right)^n$关于$n$单减且一致有界：$\exists M=1>0$，$M$与$x$无关，

且$|v_n(x)|=\left|\frac{1}{e^{nx}}\right|\le\frac{1}{e^0}=1=M$，$\forall x\in[0,+\infty)$。由一致con的Abel判法，

$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)v_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{e^{nx}}$在$[0,+\infty)$中一致con。(例如，取$a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n^{\lambda}}$，$\lambda>0$，

则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ con，从而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{a^{nx}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{\lambda}a^{nx}}$在$[0,+\infty)$中一致con，$\forall a>1$)

证(3)(2)：已知$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S(x)$，$x\in(-R,+R]$且$R>0$是收敛半径。

则$\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n$ con，$\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n\left(\frac{x}{R}\right)^n$，令$\begin{cases}u_n(x)=a_nR^n\\ v_n(x)=\left(\frac{x}{R}\right)^n\end{cases}$，

$\forall x\in[0,R]$，则$\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n$在$[0,R]$上一致con，且$v_n(x)=\left(\frac{x}{R}\right)^n$

在$[0,R]$上关于n单减且一致有界：$\exists M=1>0$，使$|v_n(x)|=\left|\frac{x}{R}\right|^n$

$\le1=M$，$\forall n\in\mathbb{N}^*$，$\forall x\in[0,R]$。依一致con的Abel判法，$\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)v_n(x)$

$=\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n\left(\frac{x}{R}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$[0,R]$上一致con，且$a_nx^n$在$x=R$点的

左C，故和函数$S(x)$亦在$x=R$点左C，即有

$\lim_{x\to R^-}S(x)=S(R)$，当$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S(x)$，$x\in[-R,R)$时，

同样有$S(x)$在点$-R$处右C：$\lim_{x\to -R^+}S(x)=S(-R)$。

附：用Euler公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 证明几个三角公式：

(1). (de Moivre)公式：$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$，$\forall n\in N^*$.

(2). $\begin{cases}\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.\end{cases}$ (3). $\begin{cases}\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta\\ \sin3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta.\end{cases}$

(4). 证明 $\sin18^\circ=\frac{\sqrt5-1}{4}\doteq\frac{\sqrt5-1}{4}$.

证(1)：利用 $(e^{i\theta})^n=e^{in\theta}=\cos n\theta+i\sin n\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^n$ 即得.

证(2)：利用 $e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta}=e^{i(\alpha+\beta)}=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)$
$=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+i(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$，比较实部，虚部即得.

证(3)：利用 $(e^{i\theta})^3=(\cos\theta+i\sin\theta)^3=e^{i3\theta}=\cos3\theta+i\sin3\theta=\cos^3\theta+3\cos^2\theta(i\sin\theta)$
$+3\cos\theta(i\sin\theta)^2+(i\sin\theta)^3=(4\cos^3\theta-3\cos\theta)+i(3\sin\theta-4\sin^3\theta)\Rightarrow$
$\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$，$\sin3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$.

证(4)：令 $\theta=18^\circ$，则 $\sin54^\circ=\cos36^\circ\Rightarrow\sin3\theta=\cos2\theta\Rightarrow$
$3\sin\theta-4\sin^3\theta=1-2\sin^2\theta$，令 $\sin\theta=\sin18^\circ=x$，则有：
$4x^3-2x^2-3x+1=0\Leftrightarrow(x-1)(4x^2+2x-1)=0$，$x-1\neq0$，$\Rightarrow4x^2+2x-1=0$.
$\Rightarrow x=\sin18^\circ=\frac{-2+\sqrt{4+16}}{2\times4}=\frac{\sqrt5-1}{4}$.

(5) 作业：EX7.1/14；EX7.2/1；EX7.3/1(7)，2(4)，5(5)，EX7.4/1；4.