第43讲：$f(x)$ 在点 x_0 处的 Taylor 级数：$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

(一) 复习：$f(x)$ 在 x_0 处的 n 阶 Taylor 公式：

设 $f(x) \in U(x_0, \delta) \triangleq (x_0-\delta, x_0+\delta)$ 中有 $n+1$ 阶导数，则对 $\forall x \in U(x_0, \delta)$

$$f(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \quad \xi \text{介于} x_0 \text{与} x \text{之间}, \quad (*1)$$

其中，$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$x \in U(x_0, \delta)$ 称之为 Taylor 式

$(*1)$ 的 Lagrange 型余项。

(二) 引入 $f(x)$ 在点 x_0 处的 Taylor 级数：

Th1：若 $f(x) \in C^{\infty}(U(x_0, \delta))$，则 $f(x)$ 在点 x_0 处能展成

Taylor 级数：

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m, \quad \forall x \in U(x_0, \delta) \qquad (*2)$$

的充要条件是：$\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = 0, \quad \forall x \in U(x_0, \delta).$ $\qquad (*3)$

(四) 充必要性：已知 $f(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m = f(x), \quad \forall x \in U(x_0, \delta)$

即部分和：$S_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m \xrightarrow{n\to\infty} f(x), \quad \forall x \in U(x_0, \delta)$

(1)

必要时，由 $f(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m = \sum\limits_{m=0}^{n} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + \sum\limits_{m=n+1}^{\infty} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m$

$\Rightarrow f(x) = S_n(x) + R_n(x) \Leftrightarrow R_n(x) = f(x) - S_n(x), \quad \forall x \in U(x_0, \delta)$

从而：$\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}[f(x) - S_n(x)] = f(x) - f(x) = 0, \quad \forall x \in U(x_0, \delta)$. 得证。

(←)充分性：已知 $f(x) \in C^{\infty}(U(x_0, \delta)) \Rightarrow f(x) \in C^{n+1}(U(x_0, \delta))$

$f(x) = \sum\limits_{m=0}^{n} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + R_n(x)$. 且已知 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

在 $f(x) = \sum\limits_{m=0}^{n} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + R_n(x)$ 两边取 $n\to\infty$ 的极限：

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = f(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + 0 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad \forall x \in U(x_0, \delta)$.

充分性获证。

Th2：若 $f(x) \in C^{\infty}(U(x_0, \delta))$，则 $f(x)$ 在点 x_0 处能展成

Taylor 级数：$f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \quad \forall x \in U(x_0, \delta)$ 的

充分条件是：$f^{(n)}(x)$ 在 $U(x_0, \delta)$ 中一致有界，即 $\exists M > 0$,

M 与 n 无关，且对 $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in U(x_0, \delta)$，有 $|f^{(n)}(x)| \leq M$ 时。

证：由 $f \in C^{\infty}(U(x_0, \delta)) \Rightarrow f(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + R_n(x)$.

(2)

且 $|R_n(x)| = \left| \dfrac{\xi^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right| \leq M \dfrac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \to \infty} 0,$

$\forall x \in U(x_0, \delta)$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$，$x \in U(x_0, \delta)$，得证了上面

充分性得证。The 成立。

$e^x = e^{x_0} \cdot e^{x-x_0} = e^{x_0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x-x_0)^n}{n!}$

$= \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{e^{x_0}}{n!}(x-x_0)^n, \forall x_0 \in (-\infty, +\infty)$

(三) 几个常用的 Taylor 级数：

(1). $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$，$x \in (-\infty, +\infty) \Rightarrow a^x = e^{x\ln a} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(\ln a)^n}{n!} x^n$.

(2). $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$，$x \in (-\infty, +\infty)$ $a^x = a^{x_0} \cdot a^{x-x_0} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(\ln a)^n a^{x_0}}{n!}(x-x_0)^n$

(3). $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} = (\sin x)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} \right)'$，$x \in (-\infty, +\infty)$.

(4). $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$，$|x| < 1$，

(5). $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-x)^n$，$|x| < 1$

(6). $\ln(1+x) = \int_0^x \dfrac{dx}{1+x} = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-x)^n dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$，$x \in (-1, 1]$

(7). $\arctan x = \int_0^x \dfrac{dx}{1+x^2} = \int_0^x (1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \cdots) dx = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{5}x^5 + \cdots$，$x \in [-1, 1]$.

(四). 例题.

● 例(1). 求证明上述 级数式子(1),(2)

例(三). 将下列各函数在展开点 x_0 处 展成 Taylor 级数

(1) $\dfrac{1}{x^2+3x+2}$, $x_0=4,0,\dfrac{1}{2}$; (2) $\sin^2 x$, $x_0=0$; (3) e^x, $x_0=5$;

(4). $\log_5^x$, $x_0=1$, (5) $x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$, $x_0=0$.

(6). $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$, $x_0=0$, (7) $\int_0^x e^{-u^2}du$, (8) $\int_0^x \dfrac{\sin u}{u}du$,
$x_0=0$, $\qquad x_0=0$.

解例(三) 在(1). 设 $f(x)=e^x$, $x\in(-\infty,+\infty)$, 则对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$

$\exists a>0$ 使 $|x|\leq a$, $\Rightarrow |f^{(n)}(x)|=|(e^x)^{(n)}|=|e^x|=e^x\leq e^a$, $\forall x\in[-a,a]$,

$\forall n\in N^*$ 且 $M=e^a$ 与 x 无关, 即 $f^{(n)}(x)$ 在 $[-a,a]$ 上一致有界. 从而由

Th2. $f(x)=e^x$ 在 $x_0=0$ 处能展成 Taylor 级数:

$$f(x)=e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{e^0}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}, \forall x\in(-\infty,+\infty).$$

在(2): 设 $f(x)=\sin x$, $x\in(-\infty,+\infty)$, 则对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$.

取 $M=2$, 则 M 与 x 无关且 $|f^{(n)}(x)|=|\sin(\frac{n\pi}{2}+x)|\leq 1<2=M$.

$\forall x\in(-\infty,+\infty), \forall n\in N^*$, 即 $f^{(n)}(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 中一致有界. 由Th2.

$f(x)=\sin x$ 在 $x_0=0$ 处能展成 Taylor 级数:

(4)

$$\sin x = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n}{2}\pi + 0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

习题(2):

$x_0 = 4,$

(1). $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3x + 2} = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{(x-4)+5} - \dfrac{1}{(x-4)+6}$

$= \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{1}{1 + \frac{x-4}{5}} - \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{1 + \frac{x-4}{6}} = \dfrac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\dfrac{x-4}{5}\right)^n - \dfrac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\dfrac{x-4}{6}\right)^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\dfrac{1}{5^{n+1}} - \dfrac{1}{6^{n+1}}\right)(x-4)^n, \quad \begin{cases} |\frac{x-4}{5}| < 1 \\ |\frac{x-4}{6}| < 1 \end{cases} \Rightarrow -1 < x < 9$

$x_0 = 0$ 时, 由 $f(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{1 + \frac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n - \dfrac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\dfrac{x}{2}\right)^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}\right) x^n, \quad \begin{cases} |x| < 1 \\ |\frac{x}{2}| < 1 \end{cases} \Rightarrow -1 < x < 1,$

$x_0 = -3$ 时, $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{(x+3)-2} - \dfrac{1}{(x+3)-1} = \dfrac{1}{1-(x+3)} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{1 - \frac{x+3}{2}}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (x+3)^n - \dfrac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{x+3}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}\right)(x+3)^n, \quad -4 < x < -2.$

(2). $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} \cos 2x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(2x)^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty),$

即 $\sin^2 x = \dfrac{1}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$

(3). $e^x = e^{x-5+5} = e^5 \cdot e^{x-5} = e^5 \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x-5)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{e^5}{n!} (x-5)^n, \quad \forall x \in R.$

(4). $\log_5 x = \log_5^{(x-1)+1} = \dfrac{\ln(1 + (x-1))}{\ln 5} = \dfrac{1}{\ln 5} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1}, \quad 0 < x \le 2.$

(5). 令 $f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$, 则 $f'(x)=\arctan x+\dfrac{x}{1+x^2}-\dfrac{x}{1+x^2}$

$=\arctan x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x|\le 1$; $\Rightarrow f(x)-f(0)=\int_0^x f'(x)dx=\int_0^x\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}dx$

即 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)(2n+1)}$, $x\in[-1,1]$.

(6). $\because f^{(n)}(0)\equiv 0$, $n=0,1,2,3,\cdots$ $\therefore f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\equiv 0\neq f(x)$, $x\in R$.

(7). $\because e^{-u^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-u^2)^n}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n u^{2n}}{n!}$, $\therefore \int_0^x e^{-u^2}dx=\int_0^x\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n u^{2n}}{n!}du$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$, $\forall x\in(-\infty,+\infty)$.

(8). $\because \dfrac{\sin u}{u}=\dfrac{1}{u}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{u^{2n}}{(2n+1)!}$

$\therefore \int_0^x\dfrac{\sin u}{u}du=\int_0^x\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{u^{2n}}{(2n+1)!}dx=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$, $\forall x\in(-\infty,+\infty)$.

补例 2 中的(6): $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x_0=0$ 处存在 Taylor 级数:

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}=0+0x+0x^2+0x^3+\cdots+0x^n+\cdots$ 但且 $f(x)$ 在 $x_0=0$ 处的 Taylor 级数

不收敛于 $f(x)$ 本身!

回作业: EX7.3: 5(2),(3),(4),(6); 6(1),(2),(4),(5),(7);

ch7课外/2.

(6).