第42讲：幂级数：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (power series)

(一) Abel定理：

(1) 若 $x_0 \neq 0$ 是 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的一个收敛点，则对 $\forall x: |x| < |x_0|$，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 都绝对收敛；

(2). 若 x_1 是 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的一个发散点，则对 $\forall x: |x| > |x_1|$，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 都 div.

证(1)：已知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ con，故 $a_n x_0^n \longrightarrow 0\ (n \to \infty) \Rightarrow \exists M > 0$.

使 $|a_n x_0^n| \le M$. $\forall n \in N^*$. 而 $|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$，

$\forall x: |x| < |x_0|$，$\forall n \in N^*$. 且 $\sum_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ 是收敛的等比级数.

(因为 $|q| = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$)，依比较法，$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ con $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 当 $|x| < |x_0|$ 时绝对con；

证(2)：用反证法：设有 x_2：$|x_2| > |x_1|$ 且 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_2^n$ con，依(1)知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ 也con，矛盾！故对 $\forall x: |x| > |x_1|$，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 皆div。

(1).

(三) 幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的收敛半径R与收敛区间:

(1) 从 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho(x) < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$

当 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \neq 0$ 时, 称数 $\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$ 为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径,

记作 $R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$; 当 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0$ 时, 记 $R=+\infty$;

此时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 中绝对收敛; 当 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=+\infty$ 时,

记 $R=0$. 此时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 仅有一个收敛点: $x=0$.

也可从 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\,|x| = \rho(x) < 1$ 中 $\Rightarrow |x| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} \triangleq R$

当 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 或 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \in (0,+\infty)$ 时, $R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}>0$; 称

$(-R,R)$ 为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间.

对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ 而言, 若 $R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}>0$,

则从 $|x-x_0|<R$ 解出 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ 的收敛区间为 (x_0-R, x_0+R)

(2). 求下列幂级数的收敛半径、收敛区间、收敛域:

(1). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}(x+1)^{n-1}$; (3). $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{3n-2}}{3n-2}$.

(2).

解(1)：设 $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=1\in(0,+\infty)$.

$\therefore R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}=\frac{1}{1}=1$，故(1)的收敛半径为 $R=1$；收敛区间为 $(-R,R)=(-1,+1)$；而当 $x=\pm1$ 时，$\because \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm1)^n}{n(n+1)}$ 绝对 conv. 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛区间是 $(-1,1)$，收敛区域为 $I=[-1,+1]$.

解(2)：设 $a_n=\frac{n^2}{3^n}$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[n]{n})^2}{3}=\frac{1^2}{3}=\frac{1}{3}\in(0,+\infty)$

故(2)的收敛半径 $R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\frac{1}{3}}=3$，收敛区间为 $(x_0-R,x_0+R)=(-1-3,-1+3)=(-4,2)$；且当 $x=-4$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}(-4+1)^{n-1}=\frac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2$，从 $(-1)^{n-1}n^2\not\to0$ 时知 $x=-4$ 是发散点，当 $x=2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}(2+1)^{n-1}=\frac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2$ 从 $n^2\not\to0$ 知，$x=2$ 也是发散点，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}(x+1)^{n-1}$ 的收敛区间及收敛域皆为 $(-4,2)$.

解(3)：从 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^{3n+1}}{3n+1}\cdot\frac{3n-2}{x^{3n-2}}\right|=|x|^3=\rho(x)<1\Rightarrow -1<x<1$. 故收敛半径 $R=1$；收敛区间为 $(-1,+1)$，且 $x=+1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{3n-2}$ 是收敛的交错级数，当 $x=-1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-1)^{3n-2}}{3n-2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{3n-2}$ 且 $\frac{1}{3n-2}\sim\frac{1}{3n}\ (n\to\infty)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}$ div. 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-2}$ div. 故(3)的收敛域为 $I=(-1,+1]$. (3).

(三) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 中的分析性质：

性质(1)：和函数 $S(x)$ 在 $(-R,R)$ 中逐点连续；

性质(2)：和函数 $S(x)$ 在 $\forall [0,x] \subset (-R,R)$ 中 Riemann 可积，

且 $\int_0^x S(x)dx = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$，

且新级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 的收敛半径仍为 R；

性质(3)：和函数 $S(x)$ 在 $(-R,R)$ 中可微，且

$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$，且新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 的收敛半径仍为 R。

证性质(1)：对 $\forall x_0 \in (-R,R)$，$\exists\, 0<r_0<R$，使 $x_0 \in (-r_0,r_0) \subset (-R,R)$，

而 $|a_n x^n| \le |a_n| r_0^n$，$\forall |x| \le r_0$，$\forall n \in N^*$，且 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r_0^n$ con，故由级数的优级数判别法，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[-r_0,r_0]$ 中一致 con，且 $a_n x^n$ 在 $[-r_0,r_0]$ 中 C，从而和函数 $S(x)$ 在 $[-r_0,r_0]$ 中 C $\Rightarrow S(x)$ 在 x_0 处 C，再由 $x_0 \in (-R,R)$ 中的任意性知，$S(x)$ 在 $(-R,+R)$ 中连续，即和函数 $S(x)$ 在 $(-R,+R)$ 中逐点连续

证性质(2)：对 $\forall [0,x]\subset(-R,R)$，同理可证 $\exists\ 0<r_0<R$，

使 $[0,x]\subset[0,r_0]\subset[0,R)$ 且 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $[0,x]$ 中一致con. 由 a_nx^n

在 $[0,x]$ 中的Riemann可积性，可知和函数 $S(x)$ 在 $[0,x]$ 中也

Riemann可积，且可逐项积分：$\int_0^x S(x)dx=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^ndx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nx^ndx$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$，最后从 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{n+2}\Big/\frac{a_n}{n+1}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\Rightarrow$ 新级数

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 的收敛半径仍为 R。

证性质(3)：先证 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ 在 $(-R,R)$ 中 ~~一致con.~~ 内闭一致con.

对 $\forall [-r_0,r_0]\subset(-R,R)$，有 $\frac{r_0}{R}<1$，且 $|na_nx^{n-1}|\le n|a_n|r_0^{n-1}$，

$\forall x\in[-r_0,r_0]$，$\forall n\in N^*$，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)|a_{n+1}|r_0^{n}}{n\ |a_n|\ r_0^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{r_0|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{r_0}{R}$

$=\rho<1$，故数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n|a_n|r_0^{n-1}$ 是 $\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ 的优级数，

从而 $\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ 在 $[-r_0,r_0]$ 中一致con. 对 $\forall x_0\in(-R,R)$，$\exists 0<r_0<R$

使 $x_0\in(-r_0,r_0)$，$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $[-r_0,r_0]$ 中可微，且 $\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'$

$=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$，$\forall x\in[-r_0,r_0]$，$\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x_0\in(-r_0,r_0)$ 处可微，且

$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'\Big|_{x_0}=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx_0^{n-1}$. 从 x_0 在 $(-R,R)$ 中任意性得证.

和函数$S(x)$在$(-R,R)$中可微；且求导级数$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)'$的收敛半径不变。

(四) 例题. 求下列幂级数的收敛半径与和函数$S(x)$.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$；(2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$，(3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$，(4) $\sum_{n=1}^{\infty}n x^n$.

解(1) 先求收敛半径：从 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{x^n}(-1)^{n-1}\right|$

$=|x|=\rho(x)<1\Rightarrow$ 收敛半径$R=1$. 且$x=1$时$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$是收敛的交错级数，$x=-1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}$ div.

故(1)的收敛域为$I=(-1,1]$. 令$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$，$x\in(-1,1)$.

则 $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^{n-1}=\cancel{\frac{(-x)^2}{1-(-x)}=\frac{x^2}{1+x}}$

$=\frac{1}{1-(-x)}$，$\forall x\in(-1,1)$. $\Rightarrow\int_0^x S'(x)dx=\int_0^x\frac{dx}{1+x}\Rightarrow S(x)-S(0)=\ln(1+x)$.

且$S(0)=0$，$\Rightarrow S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\ln(1+x)$ 即

$\ln(1+x)=S(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$　$x\in(-1,1]$.

解(2) 先求收敛半径：从 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+3}}{2n+3}\cdot\frac{2n+1}{x^{2n+1}}\right|$

$=|x^2|=x^2=\rho(x)<1\Rightarrow x\in(-1,1)\Rightarrow R=1$.

且 $x=+1$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1^{2n+1}}{2n+1}$ con，当 $x=-1$ 时 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$

con，故 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 的收敛域为 $[-1,+1]$。

令 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$，$x\in(-1,1)$ 则 $S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)'=$

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\frac{1}{1-(-x^2)}=\frac{1}{1+x^2}$，$\forall x\in(-1,1)$ $\Rightarrow$

$\int_0^x S'(x)dx=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x$，即 $S(x)-S(0)=\arctan x$。

且 $S(0)=0$ ∴ $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\arctan x$，$x\in[-1,1]$。

即 $\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$ $x\in[-1,1]$。

解(3)：先求收敛半径 R，∵ $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right|$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1}=0=\rho(x)<1$，对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ 成立，综上，$R=+\infty$。

令 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$ $x\in(-\infty,+\infty)$。

则 $S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n!}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots=S(x)$。

解ODE：$\begin{cases}S'(x)=S(x)\\S(0)=1\end{cases}$ $\Rightarrow\frac{dS(x)}{dx}=S(x)\Rightarrow\int\frac{dS(x)}{S(x)}=\int dx$

$\Rightarrow\ln S(x)=x+\ln C\Rightarrow S(x)=Ce^x$ 且 $S(0)=1=Ce^0=C$

即 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$, $x\in(-R,R)=(-\infty,+\infty)$.

即 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

例(4): 从 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^{n+1}}{n\,x^n}\right|=|x|=\rho(x)<1\Rightarrow R=1$.

且 $x=\pm1$时, $n(\pm1)^n\not\to 0$, $(n\to\infty)$. 故 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$ 的收敛域为 $(-1,+1)$. 令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$, $x\in(-1,1)$. 则 $\int_0^x S(x)dx=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}nx^n dx$ $=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^n dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^{n+1}$ 不易求和. 若令 $F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$, $x\in(-1,1)$. 则 $S(x)=xF(x)$. 且 $\int_0^x F(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$

$\Rightarrow \left(\int_0^x F(x)dx\right)'_x=F(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1(1-x)-(-1)x}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}$, $\forall x\in(-1,1)$.

故 $S(x)=xF(x)=\frac{1\cdot x}{(1-x)^2}=\frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$, $\forall x\in(-1,1)$.

例如, 当 $x=\frac{1}{2}$时, 有 $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\frac{x}{(1-x)^2}\Big|_{x=\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=2$.

当 $x=\frac{2}{3}\in(-1,1)$时, 有 $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{2}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 2^n}{3^n}=\frac{x}{(1-x)^2}\Big|_{x=\frac{2}{3}}=6$.

四、作业: EX7.3

1/(2),(4),(5),(6); 3/(1),(2),(3); 4/(1),(4).