第41讲：一致收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的三个分析性质

(一) 复习：　　　　分析性质(analytical property)

(1). 绝对收敛的级数，具有"有限和：$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$"的三个算术性质：(1) 结合律、(2) 交换律、(3) 分配律；

(2). 一致收敛的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$，具有"有限和：$S_n(x)=a_1(x)+\cdots+a_n(x)$"的三个分析(微积分)性质：(1) 连续性、(2) 可微性、(3) 可积性.

(3). 当 $\lambda>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^\lambda}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^\lambda}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 中既绝对con 又一致con. 理由：$\left|\frac{\cos nx}{n^\lambda}\right| \le \frac{1}{n^\lambda}$，$\left|\frac{\sin nx}{n^\lambda}\right| \le \frac{1}{n^\lambda}$，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\lambda}$ con，依 Weierstrass 的优级数判法.

当 $0<\lambda\le 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^\lambda}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^\lambda}$ 在 $x\ne k\pi, k\in\mathbb{Z}$ 的区间中条件收敛. 理由：依 Dirichlet 判别法. (且在 $(k\pi,(k+1)\pi)$ 中内闭一致收敛，$\forall k\in\mathbb{Z}$).

(4) 幂级数：$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域求法：从 $\rho(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|}<1$

即 $|x|\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1 \Rightarrow |x|<\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}\triangleq R$. 称此 R 为幂级数的收敛半径。$x=\pm R$ 的收敛性需单独检验。

例1. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}x^n$ $(\alpha>0)$ 的收敛域 I.

例2. 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 中逐点收敛，绝对收敛且一致收敛。

(二) 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)\xrightarrow{\text{一致}}S(x)$, $x\in I$. 则有下列三个分析性质定理：

性质 Th1：若 $a_n(x)$ 在 I 上都连续，则 $S(x)$ 在 I 上也连续。即

$\lim_{x\to x_0}S(x)=S(x_0)$, $\forall x_0\in I$，即 $\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0}a_n(x)$.

性质 Th2：若 $a_n(x)$ 在 $[a,b]\subset I$ 上都连续，从而都在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，则 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上也 Riemann 可积，且

$$\int_a^b S(x)dx=\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b a_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\int_a^b a_m(x)dx$$

性质 Th3：若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n'(x)\xrightarrow{\text{一致}}T(x)$, $x\in I$ 且 $a_n'(x)$ 在 I 上都连续，

另外 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)=S(x)$, $x\in I$. 则 $\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}a_n'(x)$, $x\in I$.

(三). 例题：

例1. 设有 Riemann 函数 $\zeta(x)\triangleq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$, $x\in(1,+\infty)$.

(1) 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 中逐点收敛且内闭一致收敛；

(2) 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 中内闭一致收敛，从而证明 $\zeta(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 中连续;

(3) 证明 $\zeta'(x), \zeta''(x), \cdots, \zeta^{(m)}(x), \cdots$ 都在 $(1,+\infty)$ 中连续. $\forall m\in N^*$，此时记作：$\zeta(x)\in C^{\infty}(1,+\infty)$.

例2. 设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$，$x\in(0,+\infty)$. 则 $S(x)\in C^{\infty}(0,+\infty)$.

求 $\int_{\ln 4}^{\ln 6} S(x)dx = \int_{\ln 4}^{\ln 6}\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\int_{\ln 4}^{\ln 6} de^{-nx}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^n}-\frac{1}{6^n}\right) = \frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$.

例3. 设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\cos\frac{n\pi}{x}}{(1+2x)^n}$，$x\in(0,+\infty)$.

(1) 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\cos\frac{n\pi}{x}}{(1+2x)^n}$ 在 $(0,+\infty)$ 中逐点、绝对且一致收敛于 $f(x)$.（用级数判别法）.

(2) 求极限 $\lim_{x\to 1}f(x)$，$\lim_{x\to+\infty}f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$.

$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n} = -\frac{1}{4}$

(四) 作业：EX7.2

4/(6),(7),(8); 5; 6; 7; 8; 9.

(3)、

(五) 一致con.评性探th的证明：

(1). 证性探th1：要证和函数$S(x)$在收敛域I上连续，只要证：对$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，对$\forall x, x_0 \in I$，当$|x-x_0|<\delta$时，$|S(x)-S(x_0)|<\varepsilon$

已知$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \xrightarrow{\text{一致}} S(x)$，$x\in I$，$\Rightarrow S_n(x)=a_1(x)+\cdots+a_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{一致}} S(x)$.

$\Rightarrow \forall \varepsilon>0$，$\exists N(\varepsilon)\in N^*$，对$\forall n>N(\varepsilon)$，$|S_n(x)-S(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$，$\forall x\in I$.

$\because x_0\in I$. $\therefore |S_n(x_0)-S(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$，对于上述取定的$n$，$S_n(x)=a_1(x)+\cdots+a_n(x)$是有限项C函数之和，因此$S_n(x)$仍是$I$上的C函数，于是，

对上述$\varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，对$\forall x, x_0\in I$，只要$|x-x_0|<\delta$，就有$|S_n(x)-S_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$
①　②　③

从而：$|S(x)-S(x_0)|=|S(x)-S_n(x)+S_n(x)-S_n(x_0)+S_n(x_0)-S(x_0)|$
④

$\le |S(x)-S_n(x)|+|S_n(x)-S_n(x_0)|+|S_n(x_0)-S(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$.
④

即$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$在$I$上也连续。

(2) 证性探th2：已知$a_n(x)$在$[a,b]\subset I$上都C，且$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$在$I$上一致con.于$S(x)$，由性探th1知，$S(x)$在$[a,b]$上连续，从而可积。

(4).

要证：$\int_a^b \sum_{m=1}^{\infty} a_m(x)dx = \sum_{m=1}^{\infty}\int_a^b a_m(x)dx$，只要证：

$$\int_a^b S(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\int_a^b a_m(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \sum_{m=1}^{n} a_m(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)dx$$

已知 $S_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{一致}} S(x)$，$\forall x\in[a,b] \Rightarrow \forall \varepsilon>0$，$\exists N(\varepsilon)\in N^*$，对 $\forall n>N(\varepsilon)$

$|S_n(x)-S(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a} \Rightarrow \left|\int_a^b S_n(x)dx-\int_a^b S(x)dx\right| \le \int_a^b |S_n(x)-S(x)|dx < \int_a^b \frac{\varepsilon dx}{b-a}$

$=\varepsilon$. 从而 $\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)dx = \int_a^b S(x)dx$，即 $\int_a^b \sum_{m=1}^{\infty} a_m(x)dx = \sum_{m=1}^{\infty}\int_a^b a_m(x)dx$

即 $\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b a_n(x)dx$ （★1）

今后，将（★1）为一致收敛的函数项级数可逐项积分。

(3) 和函数可导性定理：已知 $a_n'(x)$ 在 I 上 C 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$ 在 I 上一致con.

令 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x) = T(x)$，$x\in I$. 依定理thm2，$T(x)$ 可在 $[a,u]\subset I$ 上积分，

且 $\int_a^u T(x)dx = \int_a^u \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x)dx \xlongequal{\text{可逐项积分}} \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^u a_n'(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}[a_n(u)-a_n(a)]$

$=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(u) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n(a) = S(u)-S(a)$. 两边对 u 求导得：

$\left(\int_a^u T(x)dx\right)_u' = T(u) = (S(u)-S(a))_u' = S'(u)$，即 $S'(u)=T(u)$，即

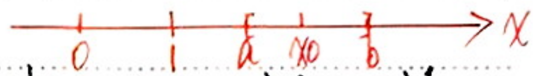
$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(u)\right)_u' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(u) \Leftrightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$，$\forall x\in I$. （★2）

将（★2）为一致收敛的函数项级数可逐项求导。 (5).

(六) 例题的解析:

证例1(1). 设 $a_n(x)=\frac{1}{n^x}$, $x\in(1,+\infty)$. 则 $a_n(x)$ 在端点1处右C且 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ div. 从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 中非一致con.

但对 $\forall x_0\in(1,+\infty)$. 由 $x_0>1$ 知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{x_0}}$ 为con. 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 中逐点收敛, 且非一致收敛。



证例1(2). 要证 $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 中C, 只要证 $\zeta(x)$ 在 $\forall x_0\in(1,+\infty)$ 处C即可. 此时. $\exists[a,b]\subset(1,+\infty)$ 使 $x_0\in(a,b)$, 从 $|a_n(x)|=\left|\frac{1}{n^x}\right|\le\frac{1}{n^a}$, $\forall x\in[a,b]$, $\forall n\in N^*$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ con, 依优级数判别法. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $[a,b]$ 中一致con. 由 $a_n(x)=\frac{1}{n^x}$ 在 $[a,b]$ 中皆C及极限换序知, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}=\zeta(x)$ 在 $[a,b]$ 中C, 而 $x_0\in(a,b)$, $\therefore\zeta(x)$ 在 x_0 处C.

再由 x_0 在 $(1,+\infty)$ 中的任意性, 即得 $\zeta(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 中C.

证例2(1): 要证 $s(x)\in C^{\infty}(0,+\infty)$ 只要证, 对 $\forall m\in N^*$, 都有 $s^{(m)}(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 中C. 即证对 $\forall x_0\in(0,+\infty)$. $s^{(m)}(x)$ 都在 x_0 处连续。而对 $\forall x_0\in(0,+\infty)$, 都有 $[a,b]\subset(0,+\infty)$, 使 $x_0\in(a,b)$.

而对 $\forall x\in[a,b]$，$(ne^{-nx})^{(m)}=a_n^{(m)}(x)=(-1)^m n^{m+1}e^{-nx}$ 且从

$e^{nx}=1+\frac{(nx)^1}{1!}+\frac{(nx)^2}{2!}+\cdots+\frac{(nx)^{m+3}}{(m+3)!}+R_{m+3}(x)>\frac{(nx)^{m+3}}{(m+3)!}\Rightarrow$

$e^{-nx}<\frac{(m+3)!}{(nx)^{m+3}}\Rightarrow|(ne^{-nx})^{(m)}|=n^{m+1}e^{-nx}<\frac{n^{m+1}(m+3)!}{(nx)^{m+3}}$

$=\frac{(m+3)!}{n^2x^{m+3}}\le\frac{(m+3)!}{n^2a^{m+3}}$，$\forall x\in[a,b]$，$\forall n\in N^*$. 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(m+3)!}{n^2a^{m+3}}=\frac{\pi^2(m+3)!}{6a^{m+3}}$

依优级数判法，$\sum_{n=1}^{\infty}(ne^{-nx})^{(m)}$ 在 $[a,b]$ 上一致con. 且 $(ne^{-nx})^{(m)}=(-1)^m n^{m+1}e^{-nx}$ 在 $[a,b]$ 上均C，从而和函数 $S^{(m)}(x)$ 在 $[a,b]$ 上也C $\Rightarrow$ $S^{(m)}(x)$ 在 $x_0\in(a,b)$ 处C，再由 m 在 N^* 中的任意性，x_0 在 $(0,+\infty)$ 中的任意性即知 $S(x)\in C^{\infty}(0,+\infty)$.

解答(2). ∵ $[\ln4,\ln6]\subset(0,+\infty)$. ∴ $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $[\ln4,\ln6]$ 中一致con.（从 $e^{nx}=1+nx+\frac{(nx)^2}{2!}+\frac{(nx)^3}{3!}+R_3(x)>\frac{(nx)^3}{3!}\Rightarrow$

$|ne^{-nx}|<\frac{3!}{n^3x^3}n=\frac{6}{n^2x^3}\le\frac{6}{n^2(\ln4)^3}$，$\forall x\in[\ln4,\ln6]$，$\forall n\in N^*$

且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n^2(\ln4)^3}$ con，依优级数判法，$\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $[\ln4,\ln6]$ 中一致con.）

利用逐项th2：$\int_{\ln4}^{\ln6}S(x)dx=\int_{\ln4}^{\ln6}\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\ln4}^{\ln6}ne^{-nx}dx$

(1).

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-e^{-nx}\Big|_{\ln 4}^{\ln 6}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^n}-\frac{1}{6^n}\right)=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}-\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}.$

记例13(1). 设 $a_n(x)=\frac{x^n\cos\frac{n\pi}{x}}{(1+2x)^n}$, $x\in(0,+\infty)$, 则 $|a_n(x)|\le\frac{x^n}{(1+2x)^n}$
$=\frac{1}{(\frac{1}{x}+2)^n}<\frac{1}{2^n}$, $\forall x\in(0,+\infty)$, $\forall n\in N^*$. 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛, 依维尔斯特拉斯判别法, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\cos\frac{n\pi}{x}}{(1+2x)^n}$ 在 $(0,+\infty)$ 中一致收敛, 绝对收敛, 故和函数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\cos\frac{n\pi}{x}}{(1+2x)^n}$, $x\in(0,+\infty)$ $\Rightarrow f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 中处处C.

解例13(2). $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n\cos\frac{n\pi}{1}}{(1+2\times1)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}=-\frac{1}{4}.$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=f(+\infty)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1.$

第4门讲的复习部分：展开的辨析

对 $\forall n\in N^*$，$S_n(x)=a_1(x)+a_2(x)+\cdots+a_n(x)$ 为"有限和"。

(I) 有限和具有"三律"：交换律、结合律、分配律等"算术性质"。

而绝对收敛的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 保持了"有限和"的"三律"：

(1). 重排 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$，新级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_n(x)$ 仍收敛且 $\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$；

(2). 对 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 任意加括号，新级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n(x)$ 仍收敛，且 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$。性质(1)对应"无限和"即级数的交换律、(2)则对应"无限和"的结合律。

(3). 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)\xrightarrow{\text{绝对}}S(x)$，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n(x)\xrightarrow{\text{绝对}}T(x)$，$x\in I$，则(Cauchy)：
$\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}b_n(x)\right)\xrightarrow{\text{绝对}}\sum_{n=1}^{\infty}c_n(x)$，$x\in I$，其中，

$c_1(x)=a_1(x)b_1(x)$，$c_2(x)=a_1(x)b_2(x)+a_2(x)b_1(x)$，$c_3(x)=a_1(x)b_3(x)+a_2(x)b_2(x)+a_3(x)b_1(x)$

……$c_n(x)=a_1(x)b_n(x)+a_2(x)b_{n-1}(x)+\cdots+a_n(x)b_1(x)$，——(Cauchy乘积)

性质(3)即为"无限和"的乘法分配律。

(L).

(II) 有限项和 $S_n(x)=a_1(x)+a_2(x)+\cdots+a_n(x)$ 是有"三个分析性质":

连续性、可微性、可积性:即当 $a_n(x)$ 在 I 上连续,可微,可积

时 $(n=1,2,3,\cdots n)$,和函数 $S_n(x)$ 在 I 上仍连续,可微,可积且

具有线性性质:1° $\lim\limits_{x\to x_0}(a_1(x)+\cdots+a_n(x))=\lim\limits_{x\to x_0}a_1(x)+\cdots+\lim\limits_{x\to x_0}a_n(x)$, $\forall x_0\in I$.

2° $(a_1(x)+\cdots+a_n(x))'=a_1'(x)+\cdots+a_n'(x)$, $\forall x\in I$, 3° $\int_a^b(a_1(x)+\cdots+a_n(x))dx=\int_a^b a_1(x)dx+\cdots+\int_a^b a_n(x)dx$, $\forall[a,b]\subset I$.

但无限项和一般不再保持这有限项和的三个分析性质,以 $1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\cdots=\frac{1}{1-x}$, $\forall x\in(-1,1)$ 为例,这里的 $a_n(x)=x^{n-1}$, $S(x)=\frac{1}{1-x}$,对 $\forall n\in N^*$, $a_n(x)=x^{n-1}$ 都在 $x=1$ 处 C,但 $S(x)=\frac{1}{1-x}$ 在 $x=1$ 处间断; $a_n(x)=x^{n-1}$ 在 $x=1$ 处可微: $d a_n(x)=(n-1)x^{n-2}dx$,

但 $S(x)=\frac{1}{1-x}$ 在 $x=1$ 处不可微;最后,对 $\forall n\in N^*$, $a_n(x)=x^{n-1}$ 在 $[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$ 上可积: $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}x^{n-1}dx=\frac{x^n}{n}\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{n}\left((\frac{3}{2})^n-(\frac{1}{2})^n\right)$, $n=1,2,3,\cdots$ 但 $S(x)=\frac{1}{1-x}$ 在 $[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$ 上不可积,因为 $S(x)$ 在 $x=1$ 处无界。

(2).

为了让无限级数"$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)=S(x)$ 在收敛域 I 上保持了分析性质，须让无限级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n'(x)$ 在 I 上一致收敛，即有一致收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 的下列三个性质th：

性质Th1：若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)\xrightarrow{\text{一致}}S(x)$，$x\in I$，且 $a_n(x)$ 在 I 上 C，$\forall n\in N^*$，则 $S(x)$ 在 I 上也 C，即对 $\forall x_0\in I$，有 $\lim_{x\to x_0}S(x)=S(x_0)$，即有 $\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0}a_n(x)$（连续的线性性质）

性质Th2：若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)\xrightarrow{\text{一致}}S(x)$，$x\in[a,b]\subset I$ 且 $a_n(x)$ 在 I 上 C，$\forall n\in N^*$，则 $\int_a^b S(x)dx=\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b a_n(x)dx$（积分的线性性质）

性质Th3：若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)=S(x)$，$x\in I$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n'(x)\xrightarrow{\text{一致}}T(x)$，$x\in I$ 且 $a_n'(x)$ 在 I 上 C，则 $S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}a_n'(x)$（导数的线性性质）