第40讲：函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$及其一致收敛性

(一). 复习：

(1). 设有函数项级数：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^{\lambda}}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{\lambda}}$，证明：

(1°) 当$\lambda>1$时，两级数都绝对收敛，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$；

(2°) 当$0<\lambda\leq 1$时，对$\forall x\neq k\pi$，$k\in Z$，两级数都条件收敛；

(3°). $\lambda\leq 0$时，两级数都发散.（$nx\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，$nx\neq k\pi$）.

证(1°)：$\because\left|\frac{\cos nx}{n^{\lambda}}\right|\leq\frac{1}{n^{\lambda}}$ 且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda}}$当$\lambda>1$时con，依比较判别

法，$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos nx}{n^{\lambda}}\right|$ con，即$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^{\lambda}}$当$\lambda>1$时绝对con；

证(2°)：当$0<\lambda\leq 1$时，设$a_n=\cos nx$，$b_n=\frac{1}{n^{\lambda}}$，则$b_n\downarrow 0$（$n\to\infty$）

且$|A_n|=|a_1+a_2+\cdots+a_n|=|\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx|=\left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right|$

$\leq\frac{2}{2|\sin\frac{x}{2}|}=\frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}\triangleq M$.（$x\neq k\pi$）依Dirichlet判别法：

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^{\lambda}}$当$0<\lambda\leq 1$时con，且从$\left|\frac{\cos nx}{n^{\lambda}}\right|\geq\frac{\cos^2 nx}{n^{\lambda}}=\frac{1+\cos 2nx}{2n^{\lambda}}\geq 0$

及$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda}}$当$0<\lambda\leq 1$时div，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n^{\lambda}}$ con 知：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos 2nx}{2n^{\lambda}}$ div.

即当 $0<\lambda\le 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^{\lambda}}$ con 而 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos nx}{n^{\lambda}}\right|$ div $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^{\lambda}}$ 当 $0<\lambda\le 1$ 时，在 $(-3\pi,-2\pi)$ 中，在 $(-\pi,0)$ 中，在 $(0,\pi)$ 中皆条件收敛。

讨论(3)．当 $nx\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ 时，$\cos nx\neq 0$，且 $a_n(x)=\frac{\cos nx}{n^{\lambda}}$ 当 $\lambda\le 0$ 时，不是关于 n 的无穷小量，即 $a_n(x)=\frac{\cos nx}{n^{\lambda}}\not\to 0\ (n\to\infty)$.

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^{\lambda}}$ 当 $\lambda\le 0$ 时，若 $nx\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，则绝对发散。

同理，可讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{\lambda}}$ 的敛散性。

(2)．函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$ 对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，都绝对 con．试论之。

证：∵ $a_n=1-\cos\frac{x}{n}\sim\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2\ (n\to\infty)$，且对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2=\frac{x^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{x^2}{2}\cdot\frac{\pi^2}{6}=\frac{(\pi x)^2}{12}$.

∴对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$．$a_n=1-\cos\frac{x}{n}$ 是正项级数．$|a_n|=a_n=1-\cos\frac{x}{n}\sim\frac{x^2}{2}\frac{1}{n^2}\ge 0$．故对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$ 都绝对收敛.

故 $(-\infty,+\infty)$ 是 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$ 的收敛域.

(2).

(二). 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的收敛域与和函数 $S(x)$.

(1). 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0)$ con. 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 有收敛点 x_0. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的收敛点的全体称之为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的收敛域。记作 I. 此时,记 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = S(x)$, $x \in I$. 并称 $S(x)$ 为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的和函数。

(2). $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的收敛域 I 的求法:

(1°) 可利用: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}(x)|}{|a_n(x)|} = \rho(x) < 1$, 求出使 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 绝对收敛的收敛域; (以 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 为例说明收敛域为 $I=(-\infty,+\infty)$).

(2°) 可利用: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x)|} = \rho(x) < 1$, 求出使 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 绝对收敛的收敛域。(以 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 为例说明收敛域为 $I=(-\infty,+\infty)$).

(3). 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 I 上的逐点收敛与一致收敛:

(1°). 对 $\forall x_0 \in I$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0)$ 都收敛. 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 I 上逐点收敛.

此时. 令 $S_n(x_0) = a_1(x_0) + \cdots + a_n(x_0)$, $S(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x_0)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0) = S(x_0)$

即对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_0(\varepsilon, x_0) \in \mathbb{N}^*$, 对 $\forall n > N_0(\varepsilon, x_0)$, $|S_n(x_0) - S(x_0)| < \varepsilon$ 恒成立.

(3).

(二). 若对 $\forall x_0\in I$, $\forall \varepsilon>0$, $\exists N(\varepsilon)\in N^*$, $N(\varepsilon)$ 仅与 ε 有关，与 x_0 无关，且对 $\forall n>N(\varepsilon)$, $|S_n(x_0)-S(x_0)|<\varepsilon$ 恒成立，则称函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在 I 中一致收敛 (uniform convergence).

显然，一致收敛是在逐点收敛的基础上增加了新条件的更强收敛性，因此，一致收敛的必定是逐点收敛的，反之未必。

(三). $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在 I 上一致收敛的四种判别法：

Th1 (Cauchy准则)：$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛 $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$, $\exists N(\varepsilon)\in N^*$, 对 $\forall n>N(\varepsilon)$, $\forall p\in N^*$, $|a_{n+1}(x)+a_{n+2}(x)+\cdots+a_{n+p}(x)|<\varepsilon$ 恒成立、

特别地，当 $p=1$ 时，$|a_{n+1}(x)|<\varepsilon$ 恒成立，即 $a_n(x)$ 在 I 上一致趋于零是 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在 I 上一致收敛的必要条件。此时，即当 $n>N(\varepsilon)$ 时，由 $|a_{n+1}(x)|<\varepsilon$ 恒成立 $\Rightarrow \sup_{x\in I}|a_n(x)|\to 0\ (n\to\infty)$.

即 $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|a_n(x)|=0$ 成为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在 I 上一致收敛的必要条件。

Th2 (Weierstrass)：若 $|a_n(x)|\le b_n$, $\forall x\in I$, $\forall n\in N^*$. 且 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ con.

则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$在I上绝对一致收敛。称数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$为$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$的优级数或控制(强)级数.(注：优级数不唯一)

证Th2：已知正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，设$\begin{cases}\sum_{n=1}^{\infty}b_n=B\in R\\ B_n=b_1+\cdots+b_n\end{cases}$.

则$\lim\limits_{n\to\infty}B_n=B\Longrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon)\in N^*$，对$\forall n>N(\varepsilon),\forall p\in N^*$，有

$|b_{n+1}+b_{n+2}+\cdots+b_{n+p}|=b_{n+1}+b_{n+2}+\cdots+b_{n+p}<\varepsilon$恒成立，此时，对$\forall x\in I$，

$|a_{n+1}(x)+\cdots+a_{n+p}(x)|\leq|a_{n+1}(x)|+\cdots+|a_{n+p}(x)|\leq b_{n+1}+\cdots+b_{n+p}<\varepsilon$恒成立.

依一致收敛的Cauchy准则，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$在I上一致收敛。

Th3(Dirichlet)，在$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$中，若$\begin{cases}① A_n(x)=a_1(x)+\cdots+a_n(x)\text{在I上一致有界},\\ ② b_n(x)\text{在I上关于n单减且一致趋零}.\end{cases}$

则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$在I上一致收敛。

(1°) $A_n(x)$在I上一致有界，是指存在$M>0$，且M与x无关，使$|A_n(x)|\leq M$，$\forall n\in N^*,\forall x\in I$;

(2°) $b_n(x)$在I上一致趋零，是指$\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon)\in N^*$，对$\forall n>N(\varepsilon)$，$0\leq b_n(x)<\varepsilon$，其中$N(\varepsilon)$与I中的x无关。

Th4 (Abel). 在 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ 中, 若 $\begin{cases} ① \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \text{ 在} I \text{中一致con}, \\ ② \{b_n(x)\} \text{ 关于} n \text{单调且在} I \text{中一致有界}. \end{cases}$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ 在 I 中一致con.

(四) 例题:

例1. 说明: $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 在 $(-1,1)$ 中逐点con, 绝对con, 内闭一致con.

但在 $(-1,1)$ 中非一致con.

例2. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 (a,b) 中逐点con, 且 $a_n(x)$ 在 a 点右连续.

已知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(a)$ div. 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 (a,b) 中非一致con.

(当 $a_n(x)$ 在 b 点左连续且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(b)$ div 时, 同样有 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 (a,b) 中为

非一致收敛的结论)

例3. $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 中逐点绝对收敛, 内闭一致con.

但在 $(0,+\infty)$ 中非一致con.

例4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{\lambda}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\lambda}}$ 当 $\lambda>1$ 时, 在 $(-\infty,+\infty)$ 中绝对con且

一致con. 当 $0<\lambda\le 1$ 时, 在 $(2k\pi, 2(k+1)\pi)$ 中条件收敛且

内闭一致con $\not\Rightarrow$ 一致con。

例5. Riemann函数 $\zeta(x) \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 在 $I=(1,+\infty)$ 中非一致con.

但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 中逐点con，绝对con，内闭一致收敛。

先证例2：用反证法：若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 (a,b) 中一致con，由Cauchy准则

对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N(\varepsilon)\in N^*$，对 $\forall n>N(\varepsilon)$，$\forall p\in N^*$，$|a_{n+1}(x)+a_{n+2}(x)+\cdots+a_{n+p}(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$

①　②　③

对 $\forall x\in(a,b)$ 恒成立，由 $a_n(x)$ 在 a 点右C，对上述不等式两边都取

$x\to a^+$ 的极限，由极限的保序性知：

$|a_{n+1}(a)+a_{n+2}(a)+\cdots+a_{n+p}(a)|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$ ④. 由上述①，②，③，④知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(a)$

收敛 矛盾！故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 (a,b) 中非一致con.

证例1：$\because$ 对 $\forall x_0\in(-1,1)$，都有 $|x_0|<1$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}|x_0|^n=\frac{|x_0|}{1-|x_0|}$，

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 在 $(-1,1)$ 中逐点绝对con；对 $\forall [a,b]\subset(-1,1)$，

$\exists r_0\in(0,1)$，使 $[a,b]\subset[-r_0,r_0]\subset(-1,1)$，对 $\forall x\in[a,b]$，有

$|x^n|\le r_0^n$，$\forall n\in N^*$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} r_0^n$ con 由Weierstrass判法，$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 在 $[a,b]$

中一致con. 即 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 在 $(-1,1)$ 中内闭一致con.

[7]

再从 $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n$ div 及例2知，$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 在 $(-1,1)$ 中非一致con.

证例3：已知 $a_n(x)=ne^{-nx}$ 在 $x=0$ 处C，且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)=\sum_{n=1}^{\infty} n$ div.

由例2知，$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 中非一致con.

对 $\forall x_0\in(0,+\infty)$，由 $e^{nx_0}=1+nx_0+\frac{(nx_0)^2}{2!}+\frac{(nx_0)^3}{3!}+R_3(x_0)>\frac{(nx_0)^3}{3!}\Rightarrow$

$e^{-nx_0}<\frac{3!}{(nx_0)^3}\Rightarrow ne^{-nx_0}<\frac{6}{n^2x_0^3}$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n^2x_0^3}=\frac{6}{x_0^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ con.

依比较判别法，$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx_0}$ con. 故 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 中逐点con且

绝对con. 而对 $\forall [a,b]\subset(0,+\infty)$，有 $|ne^{-nx}|\le ne^{-na}$，$\forall n\in N^*$，$\forall x\in[a,b]$，

且 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-na}$ con，依优级数判别法，$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在 $[a,b]$ 中一致con.

从而 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 中内闭一致con.

证例4：当 $\lambda>1$ 时，从 $\left|\frac{\cos nx}{n^\lambda}\right|\le\frac{1}{n^\lambda}$，$\left|\frac{\sin nx}{n^\lambda}\right|\le\frac{1}{n^\lambda}$，$\forall x\in R$，$\forall n\in N^*$

且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\lambda}$ con，依优级数判别法 即知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^\lambda}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^\lambda}$ 在

$(-\infty,+\infty)$ 中逐点、绝对、一致con.；当 $0<\lambda\le1$ 时，对 $\forall[a,b]\subset(2k\pi,2(k+1)\pi)$

由 $|\sin\frac{x}{2}|$ 在 $[a,b]$ 上C，知 $|\sin\frac{x}{2}|$ 在 $[a,b]$ 中有最小值，设其为 α_0，($\alpha_0>0$)

则在 $\sum_{n=1}^{\infty}(\cos nx)\frac{1}{n^\lambda}$ 中，$|A_n(x)|=|\cos x+\cdots+\cos nx|\le\frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}\le\frac{1}{\alpha_0}\triangleq M$.

且 $b_n(x)=\frac{1}{n^x}$ 关于 n 单减一致趋零，依一致 con 的狄利克雷判别法，

当 $0<\lambda\le 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^\lambda}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^\lambda}$ 在 $[a,b]$ 中皆条件 con 且一致 con。

反例5：设 $a_n(x)=\frac{1}{n^x}$，则 $a_n(x)$ 在 $x=1$ 处右 C 且 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ div.

依例2知，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上非一致 con，但对 $\forall x_0\in(1,+\infty)$，

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{x_0}}$ 绝对 con，且对 $\forall [a,b]\subset(1,+\infty)$，有 $\left|\frac{1}{n^x}\right|\le\frac{1}{n^a}$，$\forall x\in[a,b]$，

$\forall n\in N^*$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ con，由优级数法，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $[a,b]$ 中一致 con.

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 中逐点绝对 con，内闭一致，但在 $(1,+\infty)$

中 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 非一致 con.

事实上，对 $\forall\alpha>0$，$\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $[\alpha,+\infty)$ 中一致收敛；对 $\forall\alpha>1$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $[\alpha,+\infty)$ 中一致收敛。

四. 作业：EX7.2

3/(1),(2),(3),(7)； 4/(1),(2),(3),(4),(5).