第3讲习题参考解答（第3讲的作业在第3讲的习题参考答案后面）

证(一)/(1): $(1+\frac{1}{n})^n<e<(1+\frac{1}{n})^{n+1}$, $\forall n\in N^*$

令 $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$, $b_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}$, $n\in N^*$. 则第2讲中已证

$\{a_n\}$单调递增且有上界. 故$\{a_n\}$收敛. 记 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$.

则 $e=\sup\{a_n\}=\sup\{(1+\frac{1}{n})^n\}$, 从而 $(1+\frac{1}{n})^n<e$, $\forall n\in N^*$

由平均值不等式: $\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\cdot 1\right)^{\frac{1}{n+2}}=\Big(\underbrace{\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n}{n+1}\cdots\cdots\frac{n}{n+1}}_{n个}\cdot 1\Big)^{\frac{1}{n+2}}\le$

$\left(\frac{n}{n+1}+\frac{n}{n+1}+\cdots+\frac{n}{n+1}+1\right)/(n+2)=\frac{n+1}{n+2}$, $\Longrightarrow$

$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\le\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}\Longleftrightarrow\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}\ge\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}\Longleftrightarrow$

$b_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}\ge\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}=b_{n+1}$, $\forall n\in N^*$

即$\{b_n\}$单调递减且 $b_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}>0$, 即$\{b_n\}$单减且有下界.

故$\{b_n\}$收敛, 而 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n})=e\cdot 1=e$.

即 $e=\inf\{b_n\}=\inf\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\}\Rightarrow(1+\frac{1}{n})^{n+1}>e$, $\forall n\in N^*$

综上, 有 $(1+\frac{1}{n})^n<e<(1+\frac{1}{n})^{n+1}$, $\forall n\in N^*$. (☆1).

证(一)/(2): $\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$, $\forall n\in N^*$.

在(※1)两边取自然对数:

$\ln(1+\frac{1}{n})^n < \ln e < \ln(1+\frac{1}{n})^{n+1} \Leftrightarrow$

$n\ln(1+\frac{1}{n}) < 1 < (\ln(1+\frac{1}{n}))(n+1) \Leftrightarrow$

$\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}, \forall n\in N^*,$ (※2).

证(2)/(3): 利用(※1): $(\frac{n+1}{n})^n < e < (\frac{n+1}{n})^{n+1}$, $n=1,2,3,\cdots$ 有:

$(\frac{2}{1})^1 < e < (\frac{2}{1})^2$

$(\frac{3}{2})^2 < e < (\frac{3}{2})^3$

$(\frac{4}{3})^3 < e < (\frac{4}{3})^4$

$(\frac{5}{4})^4 < e < (\frac{5}{4})^5$

$\vdots$

$(\frac{n}{n-1})^{n-1} < e < (\frac{n}{n-1})^n$

$(\frac{n+1}{n})^n < e < (\frac{n+1}{n})^{n+1}$

将左边n个不等式相乘得:

$\frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!} \Leftrightarrow$

$(\frac{n+1}{e})^n < n! < (\frac{n+1}{e})^n(n+1) \Leftrightarrow$

$\frac{n+1}{e} < \sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{e}\sqrt[n]{n+1} \Leftrightarrow$

$\frac{n+1}{ne} < \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} < \frac{n+1}{ne}\sqrt[n]{n+1}$ 且

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{ne} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{e} = \frac{1}{e}$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{ne}\sqrt[n]{n+1} = (\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{ne})(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}) = \frac{1}{e}\cdot 1 = \frac{1}{e} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{ne}$.

由夹逼准则, 得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e} \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{e\sqrt[n]{n!}}{n} = 1 \Leftrightarrow$

即 $n\to\infty$ 时, $e\sqrt[n]{n!}$ 与 n 是等价的无穷大, 记作:

$e\sqrt[n]{n!} \sim n \quad (n\to\infty).$ (※3)

其中，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left((n+1)^{\frac{1}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}}=1^1=1$.

一般地，若 $\alpha_n>0$ 且 $\alpha_n\to\alpha\in R$，$\alpha>0$，$(n\to\infty)$，$\beta_n\to b\in R$，$(n\to\infty)$.

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n^{\beta_n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\alpha_n^{\beta_n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n\ln\alpha_n}=e^{b\ln\alpha}=e^{\ln\alpha^b}$

$=\alpha^b=(\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n)^{\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n}$ 称 $\alpha_n^{\beta_n}$ 为n的幂指函数。

证(三)/(1)：从(*2)：$\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$，即 $\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}$，$n=1,2,3,\cdots$

有：$\ln\frac{2}{1}<\frac{1}{1}$　　相加得：$\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$

$\ln\frac{3}{2}<\frac{1}{2}$　　而 $\ln(n+1)>\ln n\Rightarrow 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln n\Rightarrow$

$\ln\frac{4}{3}<\frac{1}{3}$　　$a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n>0$，$\forall n\in N^*$.

$\vdots$

$\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}$　　即 $\{a_n\}$ 有下界；且从 $a_{n+1}-a_n=$

$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})+\ln n=\frac{1}{n+1}-\ln\frac{n+1}{n}$

$=\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n})<0\Rightarrow a_{n+1}<a_n$，$\forall n\in N^*\Rightarrow\{a_n\}$ 单减.

故 $\{a_n\}$ 收敛. 记 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=C$，且 $C\approx0.5772$. 称常数 C

为Euler常数. 令 $\alpha(n)=a_n-C$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha(n)=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-C)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}C=C-C=0$ 即 $\alpha(n)\to0\ (n\to\infty)$ 且有

$a_n=C+\alpha(n)$ 即 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+C+\alpha(n)$. (*4)

(3).

证(三)/(2)：$\because \dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}=\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)-\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)$

而 $\begin{cases} 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2n}=\ln 2n+C+\alpha_1(n), & \alpha_1(n)\to 0 \quad (n\to\infty) \\ 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}=\ln n+C+\alpha_2(n), & \alpha_2(n)\to 0 \quad (n\to\infty). \end{cases}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[(\ln 2n+C+\alpha_1(n))-(\ln n+C+\alpha_2(n))\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\ln\dfrac{2n}{n}+\alpha_1(n)-\alpha_2(n)\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\ln 2+\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_1(n)-\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_2(n)$

$=\ln 2+0-0=\ln 2.$

证(三)/(3)：$\because \dfrac{1}{3n+1}+\dfrac{1}{3n+2}+\cdots+\dfrac{1}{3n+2n}=\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{5n}\right)-\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{3n}\right)$

$=(\ln 5n+C+\alpha_1(n))-(\ln 3n+C+\alpha_2(n))$，$C\approx 0.5772$，且 $\begin{cases}\alpha_1(n)\to 0\\ \alpha_2(n)\to 0\end{cases} (n\to\infty)$

$=\ln\dfrac{5n}{3n}+\alpha_1(n)-\alpha_2(n).$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3n+1}+\dfrac{1}{3n+2}+\cdots+\dfrac{1}{3n+2n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\ln\dfrac{5n}{3n}+\alpha_1(n)-\alpha_2(n)\right]=\ln\dfrac{5}{3}.$

证(三)/(4)：从 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}=\ln n+C+\alpha(n)$，$(\alpha(n)\to 0 \ (n\to\infty))$

可知：$\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=1+\dfrac{C}{\ln n}+\dfrac{\alpha(n)}{\ln n}$ 且

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{C}{\ln n}+\lim\limits_{n\to\infty}\alpha(n)\cdot\dfrac{1}{\ln n}$

$=1+0+0=1.$

(4).

极 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\sim \ln n \quad (n\to\infty)$.

证(ii)/(i) 设A为常数. 则从 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=A$ 可知, 对 $\forall\varepsilon>0$,

$\exists n_0\in N^*$, 当 $n\geq n_0$ 时, $A-\varepsilon<\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}<A+\varepsilon$ 恒成立. 条件

$\{b_n\}$ 严格增, $\therefore b_n-b_{n-1}>0\Rightarrow$

$(A-\varepsilon)(b_n-b_{n-1})<a_n-a_{n-1}<(A+\varepsilon)(b_n-b_{n-1})$, $n=n_0,n_0+1,\cdots,n-1,n$.

即有:

$$\begin{cases}(A-\varepsilon)(b_{n_0}-b_{n_0-1})<a_{n_0}-a_{n_0-1}<(A+\varepsilon)(b_{n_0}-b_{n_0-1})\\(A-\varepsilon)(b_{n_0+1}-b_{n_0})<a_{n_0+1}-a_{n_0}<(A+\varepsilon)(b_{n_0+1}-b_{n_0})\\(A-\varepsilon)(b_{n_0+2}-b_{n_0+1})<a_{n_0+2}-a_{n_0+1}<(A+\varepsilon)(b_{n_0+2}-b_{n_0+1})\\\vdots\\(A-\varepsilon)(b_n-b_{n-1})<a_n-a_{n-1}<(A+\varepsilon)(b_n-b_{n-1})\end{cases}$$

相加并合项同除以 b_n 得:

$$\frac{(A-\varepsilon)(b_n-b_{n_0-1})}{b_n}<\frac{a_n-a_{n_0-1}}{b_n}<\frac{(A+\varepsilon)(b_n-b_{n_0-1})}{b_n}\Leftrightarrow$$

$$A-\varepsilon-\frac{b_{n_0-1}(A-\varepsilon)}{b_n}+\frac{a_{n_0-1}}{b_n}<\frac{a_n}{b_n}<A+\varepsilon-\frac{b_{n_0-1}(A+\varepsilon)}{b_n}+\frac{a_{n_0-1}}{b_n}\Leftrightarrow$$

$$-\varepsilon+\frac{a_{n_0-1}-b_{n_0-1}(A-\varepsilon)}{b_n}<\frac{a_n}{b_n}-A<\varepsilon+\frac{a_{n_0-1}-b_{n_0-1}(A+\varepsilon)}{b_n}$$

$\because b_n\uparrow+\infty$, $\therefore \frac{a_{n_0-1}-b_{n_0-1}(A-\varepsilon)}{b_n}$, $\frac{a_{n_0-1}-b_{n_0-1}(A+\varepsilon)}{b_n}$ 均以0为极限.

$(n\to\infty)$. 对上述的 $\varepsilon>0$, $\exists n_1\in N^*$, 当 $n>n_1$ 时.

同时有：

$-\varepsilon<\dfrac{a_{n_0+1}-b_{n_0+1}(A-\varepsilon)}{b_n}<\varepsilon$；$-\varepsilon<\dfrac{a_{n_0+1}-b_{n_0+1}(A+\varepsilon)}{b_n}<\varepsilon$.

取 $N=\max\{n_0,n_1\}$，则 $n>N$ 时.

$-2\varepsilon=-\varepsilon-\varepsilon<\dfrac{a_n}{b_n}-A<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon \Leftrightarrow \left|\dfrac{a_n}{b_n}-A\right|<2\varepsilon$.

从而有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=A=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$.

证(三)/(2). 当 $A=+\infty$ 时，从 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=A=+\infty$ 知.

$\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}>1, \forall n\in N^* \Rightarrow a_n-a_{n-1}>b_n-b_{n-1}>0 \Rightarrow a_n>a_{n-1}$.

$\Leftrightarrow \{a_n\}$ 严格增，且从

$$\begin{cases} a_2-a_1>b_2-b_1 \\ a_3-a_2>b_3-b_2 \\ a_4-a_3>b_4-b_3 \\ \vdots \\ a_n-a_{n-1}>b_n-b_{n-1} \end{cases}$$

相加得：

$a_n-a_1>b_n-b_1 \Rightarrow a_n>b_n+(a_1-b_1)$

而 $b_n\uparrow+\infty$，故 $a_n\uparrow+\infty$ (严)

且从 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n-b_{n-1}}{a_n-a_{n-1}}=0^+$ 依(三)/(1)

知 $A=0^+$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=A=0^+ \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=+\infty=A=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$

证(三)/(3). 当 $A=-\infty$ 时. 设 $a_n=-c_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=A=-\infty \Rightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-c_n+c_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c_n-c_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=+\infty$. 依(三)/(2).

有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c_n}{b_n}=+\infty$ 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-a_n}{b_n}=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=-\infty$.

证(四)/(1)：令 $b_n=n$，$\alpha_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则 $b_n\uparrow+\infty$（严）

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha_n-\alpha_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{1}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，依Stolz Th.

有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{b_n}=a$ 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

证(四)/(2)：若 $a=0$，则从 $a_i>0$ 知

$0<\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}<\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}0=0=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a=0$. 由夹逼准则，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=0=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$；

若 $a>0$，则从 $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln(a_1a_2\cdots a_n)}$

$=e^{\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}}$

$\xlongequal{\text{由四/(1)}}e^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n}=e^{\ln a}=a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

证(四)/(3)：已知 $a_i>0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=a\geq0$. 取 $a_0=1$，

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_0}\frac{a_2}{a_1}\cdots\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\frac{a_n}{a_{n-1}}}\xlongequal{\text{由(四)/(2)}}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=a$.

证(五)：设 $h=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_m|\}$，则

$h^n<|a_1|^n+|a_2|^n+\cdots+|a_m|^n<mh^n\Rightarrow$

$h<(|a_1|^n+|a_2|^n+\cdots+|a_m|^n)^{\frac{1}{n}}<m^{\frac{1}{n}}h$，$\forall m\in N^*$ 且

$\lim\limits_{n\to\infty}h=h=\lim\limits_{n\to\infty}m^{\frac{1}{n}}h=1\cdot h$. 依夹逼准则,

$\lim\limits_{n\to\infty}(|a_1|^n+|a_2|^n+\cdots+|a_m|^n)^{\frac{1}{n}}=h=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_m|\}$.

证(六)/(1)：$\because 1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}(n^2+n)$，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n})=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$;

(六)/(2)：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})=\frac{1}{3}$,

(六)/(3)：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^4}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\frac{n(n+1)}{2})^2}{n^4}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4}(1+\frac{1}{n})^2=\frac{1}{4}$

(六)/(4)：设 $b_n=n^{m+1}$，$m\in N^*$，$a_n=1^m+2^m+\cdots+n^m$. 则 $b_n\uparrow+\infty$ (严)

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^m}{n^{m+1}-(n-1)^{m+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^m}{(m+1)n^m-C_{m+1}^2n^{m-1}+\cdots}$

$=\frac{1}{m+1}$. 依Stolz定理，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^m+2^m+\cdots+n^m}{n^{m+1}}=\frac{1}{m+1}$,

证(七)/(1) 先证 $\{a_n\}$ 单减：由 $a_n=4^{-n}C_{2n}^n=4^{-n}\frac{(2n)!}{n!\,n!}\Rightarrow$

$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{4^{-n}(2n)!}{4^{-n+1}(2n-2)!}\cdot\frac{(n-1)!\,(n-1)!}{n!\,n!}=\frac{2n(2n-1)}{4n\cdot n}=\frac{4n^2-2n}{4n^2}<1$

且 $a_{n-1}>0\Rightarrow a_n<a_{n-1}$ 恒成立. $\therefore\{a_n\}$ 单减.

(2)/(2°). (i) 用华莱士(Wallis)公式：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2=\frac{\pi}{2}$.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+1}}{1}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ 即 $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\sim\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, $(n\to\infty)$

而 $a_n=4^{-n}C_{2n}^{n}=\frac{(2n)!}{4^n n!n!}=\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)\cdots 4\times3\times2\times1}{(2^n n!)(2^n n!)}$

$=\frac{\cancel{2n}(2n-1)\cancel{(2n-2)}(2n-3)\cancel{(2n-4)}\cdots\cancel{4}\times3\times\cancel{2}\times1}{(2n(2n-2)(2n-4)\cdots4\times2)\cancel{(2n(2n-2)(2n-4)\cdots4\times2)}}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\sim\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0 \Leftrightarrow$ 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists n_0$

$\in N^*$, 对 $\forall n>n_0$. $|a_n-0|<\varepsilon$ 恒成立. 即 $0<a_n<\varepsilon$ 恒成立. $(n\geq n_0+1)$

(ii) 用斯特林(Stirling)公式：$n!=\sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}$, $\theta_n\in(0,1)$

$a_n=\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}=\frac{\sqrt{2(2n)\pi}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}e^{\frac{\theta_{2n}}{24n}}}{4^n(2n\pi)\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}e^{\frac{\theta_n}{6n}}}=\frac{1}{\sqrt{n\pi}}e^{\frac{\theta_{2n}}{24n}-\frac{\theta_n}{6n}}$

$\longrightarrow 0\cdot e^0=0$. $(n\to\infty)$. 余同上.

(iii) $0<a_n=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots5\times3\times1}{2n\ (2n-2)\cdots6\times4\times2}=(1+\frac{-1}{2n})(1+\frac{-1}{2n-2})\cdots(1-\frac{1}{2})$

$\ln a_n=\ln(1+\frac{-1}{2n})+\ln(1+\frac{-1}{2n-2})+\cdots+\ln(1+\frac{-1}{2})<\frac{-1}{2n}+\frac{-1}{2n-2}+\cdots\frac{-1}{4}+\frac{-1}{2}$

$=-\frac{1}{2}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1})\sim-\frac{1}{2}\ln n\Leftrightarrow$

$0<a_n<e^{-\frac{1}{2}\ln n}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}0=0=\lim\limits_{n\to\infty}e^{-\frac{1}{2}\ln n}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

此处,使用了不等式：$\ln(1+x)\leq x$, $\forall x\in(-1,+\infty)$. 且等号仅在 $x=0$ 时才成立。(iv) 其它方法.

第3讲：数列极限习题课（李友岩）

（2024.9.13周）

（一）证明：(1). $(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$，$\forall n\in N^*$

(2). $\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$，$\forall n\in N^*$.

(3). $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$，即 $\sqrt[n]{n!}\,e \sim n$ $(n\to+\infty)$.（等价无穷大）.

（二）设 $a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$，$n\in N^*$，证明：

(1). $\{a_n\}$收敛；(2). $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}) = \ln 2$；

(3). $\lim(\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+2n}) = \ln\frac{5}{3}$；(4). $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\sim \ln n$

（三）证明Stolz（施笃兹）Th：若 $\begin{cases} ① \ b_n\uparrow+\infty\ (\text{严格增}) \\ ② \ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}} = A, \end{cases}$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = A$，$A$为常数或 $A=\pm\infty$ 都成立。

（四）证明：(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a\in R$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}a_n = a$，

(2). 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a>0$，且 $a_i>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}a_n = a$.

(3). 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = a>0$ 且 $a_i>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = a$.

（五）设 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 是 m 个实数，证明：对 $\forall m\in N^*$，

$\lim\limits_{n\to\infty}(|a_1|^n+|a_2|^n+\cdots+|a_m|^n)^{\frac{1}{n}} = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_m|\}$. 已知①.

(六) 证明：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\frac{1}{2}$；$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}=\frac{1}{3}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^4}=\frac{1}{4}$；$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^m+2^m+\cdots+n^m}{n^{m+1}}=\frac{1}{m+1}$，$\forall m\in N^*$.

(七) 设 $a_n=4^{-n}C_{2n}^{n}$，$n\in N^*$，证明：对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists n\in N^*$，使 $a_n<\varepsilon$.（新生入学摸底试题）. 并证 $\{a_n\}$ 单调减。

(八) 作业：(第3讲的作业)

(1) ex1.2：9；13；18(5)；20；22(3)；23；

(2) ch1总：10(1)；11.

(九) 第4讲：实数系连续性的五个等价命题(预告)
(2024.9.14 周六)

请同学们预习课本 Th1.11；Th1.13；Th1.15；Th1.16；Th1.18，分别是确界原理、单调有界极限存在准则、闭区间套定理、列紧性定理、柯西(Cauchy)收敛准则。

(注：Stolz 定理中，若 $A=\infty$，则未必有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A=\infty$.

例如：设 $a_n=(-1)^n n$，$b_n=n$，则 $b_n\uparrow+\infty$(严)，且 $\frac{a_n-a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}}=\frac{(-1)^n n-(-1)^{n+1}(n+1)}{-1}$

$=(-1)^{n+1}(-n-n+1)=(-1)^{n+1}(-2n+1)\longrightarrow\infty$ $(n\to\infty)$. 但

$\frac{a_n}{b_n}=\frac{(-1)^n n}{n}=(-1)^n$ 振荡 div.)

附(2).