目录

1 数列极限

1.1 几个常用的记号

1. $\forall \leftarrow A \leftarrow any$: 任意给定的一个；给定后为常数
2. $\exists \leftarrow E \leftarrow exist$: 存在一个；通常不唯一
3. $\sup E$: 数集 E 的最小上界，即 E 的上确界 (supremum)

   $\sup E$ 同时满足两条件：

   (a) $\forall x \in E, x \leq \sup E$;

   (b) $\forall \varepsilon > 0, \exists\, x_0 \in E, \sup E - \varepsilon < x_0$.
4. $\inf E$: 数集 E 的最大下界，即 E 的下确界 (infimum)

   $\inf E$ 同时满足两条件：

   (a) $\forall x \in E, x \geq \inf E$;

   (b) $\forall \varepsilon > 0, \exists\, x_0 \in E, x_0 < \inf E + \varepsilon$.

例 1.1. 设 $E = \{1,3,5,8\} F = (-\sqrt{3}, \pi]$, 则:
$\sup E = 8, \inf E = 1, \sup F = \pi, \inf F = -\sqrt{3}$. 且有

1. $\sup E = -\inf(-E)$;
2. $\inf F = -\sup(-F)$;

注记. 这里的 $-E$ 表示 E 的相反数集合，即 $-E = \{-e : e \in E\}$.

1.2 微积分或数学分析必须建立在实数系上 R 上

理由: 极限运算时微积分的最基本运算, 而有理数集合 Q 关于极限运算时不封闭的. 例如: $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n = e; \forall n \in N, (1+\dfrac{1}{n}) \in Q$, 但 $e \notin Q$.

又如,$\forall n \in N, a_n = \sum_{m=1}^{n} \dfrac{1}{m^2} \in Q$, 但 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{\pi^2}{6} \notin Q$.

实数集合 R 在数轴上的点是连续不断的, 且关于极限运算时封闭的. 因此, 称实数集 R 是具有连续性. 实数集 R 的连续性也称为实数集的完备性.

描述实数集 R 连续性的公理通常有五个:

1. 确界存在原理;

2. 单调有界极限存在准则;

3. 极限存在的柯西 (Cauchy) 准则;

4. 闭区间套定理;

5. 列紧性原理, 即有界数列必有收敛子列定理.

这五个公理是互相等价的, 本课程采用" 确界存在原理" 作为实数集 R 连续性的公理.

注记. *这五条公理与课本 1.1.3 的连续性公理是等价的, 即任意一个公理都可以推导出另外四个公理. 因此这里说这五个等价命题描述了 R 的连续性.*

公理 1.2. *确界存在原理*

有上 (下) 界的非空实数集 E 必有上 (下) 确界 $\sup E(\inf E)$.

1.3 数列极限的科学定义

设数列 $\{a_n\}$ 以常数 a 为极限, 科学的定义如下:

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N*, \forall n > N$ 都有 $|a_n - a| < \varepsilon$ 成立, 则 $\{a_n\}$ 以常数 a 为极限, 记为 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 或 $a_n \to a(n \to \infty)$.

事实上, 所有的收敛的有理数列, 其极限点的全体即是实数集 R. 即实数集 R 是有理数列的极限值构成的.

注记. *1.Q 对极限是不封闭的; 2. 由 Q 组成的数列的极限可以是实数; 3. 由 Q 组成的数列的极限只能是实数; 4. 由 Q 组成的所有收敛数列, 他们的极限的集合, 恰好就是 R, 不多不少.*

理由如下:

对 $\forall x \in R$, 设 x 的小数表示为:$x = a_0.a_1a_2a_3\cdots$, 则有理数列:$a_0, a_0.a_1, a_0.a_1a_2, \cdots$ 当 $n \to \infty$ 时, 其极限为 x. 若 x 是有理数, 则 $a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 是有限小数或循环小数, 若 x 是无理数, 则 $a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 是无限不循环小数, 则极限点 x 是无理数.

注记. *此处 $x = a_0.a_1a_2a_3\cdots$, 其中每一个 a_i 都是一个数字, a_0 是整数部分, $a_1a_2a_3\cdots$ 是小数部分. 比如, $x = 3.1415926\cdots$, 那么 $a_0 = 3, a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 1, a_4 = 5, a_5 = 9, a_6 = 2, a_7 = 6, \cdots$.*

可以由 $x = a_0.a_1a_2a_3\cdots$ 构造出一个数列 $\tau_1 = a_0, \tau_2 = a_0.a_1, \tau_3 = a_0.a_1a_2, \cdots$, 说 x 为极限指的, 是 x 是数列 $\{\tau_n\}$ 的极限, 记为 $\lim_{n\to\infty} \tau_n = x$.

都用 x 代指, 是因为我这里不能确定 x 是不是有限小数, 有理数还是无理数. 但是 x 是数列 $\{\tau_n\}$ 的极限是确定的.

1.4 极限存在的两个常用准则

1. 单调有界极限存在准则: 若数列 $\{a_n\}$ 单调增 (减) 且有上 (下) 界, 则 $\{a_n\}$ 收敛. 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup a_n (\inf a_n)$.

2. 夹逼准则 (即两边夹准则): 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 满足 $a_n \le b_n \le c_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

证明. 单调增有界极限存在.

设数列 $\{a_n\}$ 单调增且有上界, 由确界存在定理,$\{a_n\}$ 有上确界. 令 $\sup a_n = \beta$, 则 β 是 $\{a_n\}$ 满足以下两点:

1. $\forall n \in N, a_n \le \beta$;

2. $\forall \varepsilon > 0, \exists a_{n_0} \in \{a_n\}, \beta - \varepsilon < a_{n_0}$.

又因为 $\{a_n\}$ 单调增, 故 $\forall n > n_0, a_n \le a_{n_0} > \beta - \varepsilon$, 且 $a_n \ge \beta < \beta + \varepsilon$. 即 $|\beta - a_n| < \varepsilon$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \beta$. □

证明. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in N*, \forall n > N, |a_n - a| < \varepsilon$. 又 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in N*, \forall n > N, |c_n - a| < \varepsilon$.

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则 $\forall n > N, a_n \le b_n \le c_n$, 故 $a - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < a + \varepsilon$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$. □

例 1.3. *下列 a, b, q, c_1, c_2 皆为常数).*

1. *设 $|q| < 1$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} aq^n = 0$;*

2. *设 $a > 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$;*

3. *证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;*

4. *设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} (c_1 a_n + c_2 b_n) = c_1 a + c_2 b$. 即线性组合的极限等于极限的线性组合, 称此为极限的线性性质.*

数列的极限具有线性性质, 同理函数极限也是具有线性性质的, 统称为极限的线性性质. 由极限的线性性质, 可导出微积分中绝大多数概念也具有线性性质. 如函数的导数、导数、微分、积分, 都具有线性性质.

作业. ex1.2. 1(2)(4) ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8 (5) ; 15(1) ; 19.

2 数列极限的性质与应用

2.1 复习数列极限的线性性质

设 a, b, c_1, c_2 为常数且 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, 证明：$\lim_{n\to\infty}(c_1a_n + c_2b_n) = c_1a + c_2b = c_1\lim_{n\to\infty} a_n + c_2\lim_{n\to\infty} b_n$.

从上述极限的线性性质，不难得到以下结论：

1. 当 $c_1 = c_2 = 1$ 时, $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$;
2. 当 $c_1 = 1, c_2 = -1$ 时, $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$;
3. 当 $c_1 = k, c_2 = 0$ 时, $\lim_{n\to\infty} ka_n = k\lim_{n\to\infty} a_n$.
4. 数列的线性性质可推广到任意有限个收敛数列的情形: 设 $a_{1n} \to a_1, a_{2n} \to a_2, \cdots, a_{mn} \to a_m$, 且 $a_1, a_2, \cdots, a_m, c_1, c_2, \cdots, c_m$ 为常数, 则

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}(c_1a_{1n} + c_2a_{2n} + \cdots + c_ma_{mn})\\ =&c_1a_1 + c_2a_2 + \cdots + c_ma_m\\ =&c_1\lim_{n\to\infty} a_{1n} + c_2\lim_{n\to\infty} a_{2n} + \cdots + c_m\lim_{n\to\infty} a_{mn}\end{aligned}$$

对 $\forall m \in N^*$ 成立.

2.2 数列极限的”四性”

1. 有界性: 若 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 有界, 反之未必;
2. 唯一性: 若 $\{a_n\}$ 收敛, 则其极限唯一;
3. 保号性: 若 $\{a_n\}$ 收敛且 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$,$a_n \geq 0, \forall n \geq n_0$, 则必有 $a \geq 0$;
4. 保序性: 若 $a_n \to a, b_n \to b$, 且 $a_n \leq (\geq) b_n, \forall n \geq n_0$, 则必有 $a \leq (\geq) b$.

2.3 收敛数列极限的四则运算法则

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$.
2. $\lim_{n\to\infty} a_nb_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$.
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$, 其中 $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

证明. 仅证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{b}(b\neq=0), n\to\infty$

注意到 $\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right|=\frac{|b_n-b|}{|b||b_n|}$

不妨设 $b>0$, 即 $\exists N_1, \forall n>N_1, s.t. b_n>b-\varepsilon$ (a)

取 $\varepsilon<\frac{b}{2}$, 则 $b_n>b-\varepsilon\overset{(a)}{=}\frac{b}{2}$ (b)

由 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, 对 $\forall\varepsilon>0, \exists N_2, \forall n>N_2, |b_n-b|<\varepsilon$ (c)

得 $\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right|=\frac{|b_n-b|}{|b||b_n|}\overset{(b)}{<}\frac{|b_n-b|}{b\frac{b}{2}}\overset{(c)}{<}\frac{\varepsilon}{\frac{b^2}{2}}$

□

2.4 例题

例 2.1. 设 $a_n=(1+\dfrac{1}{n})^n, n\in N^*$, 证明:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=e\approx 2.7182818128$;
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e=\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x, x\in R$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e, x\in R$

例 2.2. 证明闭区间套定理: 若 $\{[a_n,b_n]\}$ 是一列闭区间, 满足 $[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}], n=1,2,\cdots$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$, 则存在唯一的实数 ξ, 使得 $\xi\in[a_n,b_n], n=1,2,\cdots$.

注记. 闭区间套定理, 是刻画实数集 R 的连续性的五个等价公理之一.

为了纪念数学家 Euler(欧拉) 在其中的贡献, 将 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n$ 记为 e. 经计算可知,$e\approx 2.718281828$. 讲义中还证明了 e 是一个无理数, 且将以 e 为底的对数称为自然对数, 记为 $\ln x$, 即 $\ln x=\log_e x$.

作业. (1) ex1.2: 14;15(3)(4);16;18(3);22(2)(4);

(2) 第一章综合题: 3(2).

注记. 在函数极限中,

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\in R\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=A, \lim_{x\to-\infty}f(x)=A.$$

在稍后的函数极限中将给予证明.

3 数列极限习题课

3.1 习题

1. $(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}, n \in N^*$.

2. $(\frac{1}{n+1}) < \ln(1+\frac{1}{n}) < (\frac{1}{n}), n \in N^*$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$, 即 $\sqrt[n]{n!}e \sim n$.

$a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n, n \in N^*$, 证明:

1. $\{a_n\}$ 收敛;

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n} = \ln 2$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3n+1}+\cdots+\frac{1}{3n+2n} = \ln\frac{5}{3}$;

4. $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n \sim \ln n$.

3.2 关于无穷大

1. $\{a_n\} \to +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in N^*, \forall n > N, a_n > M$.

2. $\{a_n\} \to -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in N^*, \forall n > N, a_n < -M$.

3. $\{a_n\} \to \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in N^*, \forall n > N, |a_n| > M$.

3.3 Stolz 定理及其应用

定理 3.1 (Stolz 定理)**.** *设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 是两个数列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, 若*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}} = A$$

, 其中 A 可以是有限数, 也可以是 $\pm\infty$;$\{b_n\}$ 是严格单调递增且趋于 $+\infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = A = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}.$$

注记. *完整的利用 Stolz 定理的过程要求先证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}} = A$ 极限存在并求得 A, 然后再利用 Stolz 定理求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$. 不过不严谨的直接写出 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$ 也是能接受的.*

注记 3.2. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=\infty$ 时,*Stolz* 定理不一定成立. 反例可取 $a_n=(-1)^n, b_n=n$.

3.4 例题

例 3.3. 证明:

1. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$;
2. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\geq 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$.
3. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$.

例 3.4. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 是 m 个常数, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_1|^n+|a_2|^n+\cdots+|a_m|^n}=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_m|\}.$$

例 3.5.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\dfrac{1}{2}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}=\dfrac{1}{3}$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^4}=\dfrac{1}{4}$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}=\dfrac{1}{k+1}$.

定理 3.6. 常用的平均值不等式:

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个正数, 则有:

$$\frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}\leq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\leq\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}.$$

注记 3.7. 给出一些常用的希腊字符与读音:

α	β	γ	δ	ϵ	ε	ζ	η	θ	ϑ
alpha	beta	gamma	delta	epsilon	epsilon	zeta	eta	theta	theta
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	o	π	ϖ	ρ
iota	kappa	lambda	mu	nu	xi	omicron	pi	pi	rho
ϱ	σ	ς	τ	υ	ϕ	φ	χ	ψ	ω
rho	sigma	sigma	tau	upsilon	phi	phi	chi	psi	omega