ch3 习题课

§1. 导数 & 微分

def: $f(x)$ 在 $U_\eta(x)$ 中有定义. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在且有限. 则 $f(x)$ 在 x_0 处可导.

极限称为 $f(x)$ 在 x_0 处导数.

Rmk: $f(x)$ 在 x_0 处可导 $\Leftrightarrow$ $f_\pm'(x_0)$ 存在且相等

Rmk: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导 $\longrightarrow$ $\forall x\in(a,b)$. $f(x)$ 可导. $f_+'(a)$, $f_-'(b)$ 存在.

Thm: 可导 $\Rightarrow$ 连续

$$\lim_{x\to x_0} f(x)-f(x_0) = \lim\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim x-x_0 = 0$$

· 反函数求导. $f\in C(a,b)$. $y=f(x)\nearrow$. $f(x)$ 在 x_0 可导. 则 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y_0=f(x_0)$ 处可导 且

有 $f'(x_0)\neq 0$. $(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$.

$$f^{-1}(f(x))\equiv x \Rightarrow [f^{-1}(f(x))]'=1 \Rightarrow [f^{-1}(f(x_0))]'\cdot f'(x_0)=1$$

例: $y=\arcsin x \longleftrightarrow x=\sin y$. $(-\frac{\pi}{2}\leq y\leq\frac{\pi}{2})$

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

例: $y=\log_a x \longleftrightarrow x=a^y$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{(a^y)'}=\frac{1}{a^y\ln a}=\frac{1}{x\ln a}$$

$$\Rightarrow \ln|f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)} \qquad \ln|x|=\frac{1}{x}.$$

· 幂指函数求导. $y=u(x)^{v(x)}$

$$y'=(u(x)^{v(x)})'=(e^{v(x)\ln u(x)})'=e^{v(x)\ln u(x)}\left[v'(x)\ln u(x)+\frac{v(x)u'(x)}{u(x)}\right]$$

· 含参求导. $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ $\rightarrow$ $y'(x)=\psi'(\varphi^{-1}(x))\cdot(\varphi^{-1}(x))'=\psi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$

· 高阶导数: $f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))'$. $\frac{d^nf}{dx^n}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right)$

$f(x)$ 在 $U_\eta(x_0)$ 中 $n-1$ 阶可导. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}$ 存在且有限. 则称 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导

· (1) $(f(x)\pm g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x)\pm g^{(n)}(x)$

(2) $(f(x)\cdot g(x))^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x)$

求法：(1) 归纳 $(e^{ix})^{(n)} = e^{i(\frac{n\pi}{2}+x)} \to \sin^{(n)}(x) = \sin(x+\frac{n\pi}{2})$. $\cos^{(n)}(x) = \cos(x+\frac{n\pi}{2})$

(2) 拆项 $y = \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$

(3) 递推 $y = \arctan x$. 求 $y^{(n)}(0)$

$y' = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow (1+x^2)y' = 1$. 两边同求 $n-1$ 阶导.

$0 = (1+x^2)y^{(n)} + 2(n-1)x\,y^{(n-1)} + (n-1)(n-2)y^{(n-2)}$.

代入 $x=0$. 有 $y^{(n)}(0) = -(n-1)(n-2)y^{(n-2)}$

def: 称 f 在 x 可微. 指 $\exists A = A(x)$, $f(x+\Delta x) = f(x) + A\Delta x + o(\Delta x)$ $(\Delta x \to 0)$

记 $dy = df(x) = f'(x)\,dx$　　导数 = 微商.　$\Delta y - dy = o(\Delta x)$

Thm: 一阶微分不变性

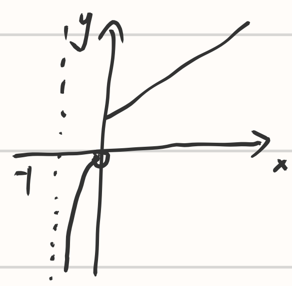
$y = f(x)$ 在 $x = \varphi(u)$ 处可微 $x = \varphi(u)$ 在 u 处可微. 则 $y = f(\varphi(u))$ 在 u 处可微. 且

$$dy = (f(\varphi(u)))'du = f'(\varphi(u))\varphi'(u)du = f'(x)dx.$$

Cor 高阶微分: $d^{n+1}y \triangleq d(d^n y)$. $dx^n = (dx)^n$

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx + f'(x)d(dx) = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x.$$

例题 1. $y = \begin{cases} \ln(1+x), & x<0 \\ 1+x, & x \geq 0 \end{cases}$ 在0处是否可导.



0处不连续 $\longrightarrow$ 不可导!

但: $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{1+\Delta x - 1}{\Delta x} = 1$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{\ln(1+\Delta x) - 0}{\Delta x} = 1$

$f'_+(0) = f'_-(0)$. 可导?

错因: $f(0) = 1$ 已经确定.

2. $f(x)$ 是以2为周期的连续函数. $x=1$ 处可导. $x=0$ 邻域内满足

$f(1+\sin x) - 3f(1-\sin x) = 8x + o(x)$ $(x \to 0)$. 求 $y = f(x)$ 在 $x=3$ 处切线方程.

$f(x)$ 连续，令 $x\to 0$，有 $f(1)=0$

$x=1$ 处可导，有 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{8x+o(x)}{\sin x}=8$

则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-f(1)}{\sin x}+3\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1-\sin x)-f(1)}{-\sin x}=4f'(1)=8\Rightarrow f'(1)=2$

$\therefore$ 切线 l: $y=2(x-3)$

Cor：$x\to 0$ 时，$h=g(x)\to 0$，$g(x)$ 在 x 去心邻域内不为0，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x_0+g(x))-f(x_0)}{g(x)}=f'(x_0)$$

3. 求 $y=f(x)=\frac{(x+5)^2(x-4)^{1/3}}{(x+2)^5(x+4)^{1/2}}$ 的导数.

取对数. $\ln|f(x)|=2\ln|x+5|+\frac{1}{3}\ln|x-4|-5\ln|x+2|-\frac{1}{2}\ln|x+4|$

两边求导. $f'(x)/f(x)=\frac{2}{x+5}+\frac{1}{3(x-4)}-\frac{5}{x+2}-\frac{1}{2(x+4)}$

$$f'(x)=\frac{(x+5)^2(x-4)^{1/3}}{(x+2)^5(x+4)^{1/2}}\left(\frac{2}{x+5}+\frac{1}{3(x-4)}-\frac{5}{x+2}-\frac{1}{2(x+4)}\right)$$

4. $f(x)$ 在点 a 可导，$f(a)\neq 0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n$

① 看成 1^∞. 构造 $(1+\frac{1}{n})^n$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(1+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{f(a+x)-f(a)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{f(a+x)-f(a)}{f(a)}\right)^{\frac{f(a)}{f(a+x)-f(a)}}\right]^{\frac{f(a+x)-f(a)}{xf(a)}}$$

$$=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$$

② 直接写导数：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln|f(x+a)|-\ln|f(x)|}{x}=(\ln|f(x)|)'\Big|_{x=a}=\frac{f'(a)}{f(a)}$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}=\frac{f'(a)}{f(a)}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right)^n=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$$

5. $f(0)=0$，$f'(0)$ 存在. $x_n=f(\frac{1}{n^2})+f(\frac{2}{n^2})+\dots+f(\frac{n}{n^2})$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

$f'(0)$ 存在 $\Rightarrow$ $f(x)$ 在 $x=0$ 处可微

$f(\frac{i}{n^2})=f'(0)\frac{i}{n^2}+o(\frac{i}{n^2})$ $\quad i=1,2\cdots n$ $(n\to\infty)$

$\therefore x_n=f'(0)\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}+o(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2})=f'(0)\cdot\frac{n(n+1)}{2n^2}+o(\frac{n(n+1)}{2n^2})$

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}f'(0)$

类似：求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\frac{1}{n^2}+\sin\frac{2}{n^2}+\cdots+\sin\frac{n}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)\right]=\sqrt{e}$$

6. $\arctan\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，求 dy，$\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$.

两边微分，
$$\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot d\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,d\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$
$$\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$dy=\frac{x+y}{x-y}dx$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x+y}{x-y}\right)=\frac{\left(1+\frac{dy}{dx}\right)(x-y)-\left(1-\frac{dy}{dx}\right)(x+y)}{(x-y)^2}$$
$$=\frac{1}{(x-y)^2}\cdot\left[\frac{2x}{x-y}(x-y)-\frac{-2y}{x-y}(x+y)\right]$$
$$=\frac{2x^2+2y^2}{(x-y)^3}$$

§2. 连续相关例题

def：间断点：不连续点 x_0

$f(x_0+0)$ $f(x_0-0)$ 存在 —— 第一类 ——— 相等，可去～ / 不等，跳跃～.

有一个不存在 —— 第二类

1. $f(x)=\dfrac{3^{\frac{1}{x}}+6}{3^{\frac{1}{x}}-3}$ 间断点.

$x=0$，$x=1$.

$x\to0^+$时 $3^{\frac{1}{x}}\to\infty$.　$x\to0^-$时 $3^{\frac{1}{x}}\to0$.

$\therefore f(0+0)=1$.　$f(0-0)=-2$.　存在且不等 $\longrightarrow$ 第一类，跳跃

$x\to1$时，$f(x)\to\infty$　第二类.

2. 数列极限 $\Longrightarrow$ 函数极限

$a>1$，$\alpha>0$.　(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^b}{a^n}=0$　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^b}{a^x}=0$

(1). $a^n=(1+(a-1))^n=\sum C_n^k(a-1)^k>C_n^k(a-1)^k$

则 $0<\frac{n^b}{a^n}<\frac{n^b}{C_n^k(a-1)^k}=\frac{k!}{(a-1)^k}\cdot\frac{n^b}{n(n-1)\cdots(n-k+1)}$. 取n充分大 $k>b$

则 右 $\to 0$. $(n\to\infty)$

(2). 设 $[x]$ 为 x 向下取整、x 充分大，有

$$0<\frac{x^b}{a^x}=\left(\frac{x}{[x]}\right)^b\cdot\frac{[x]^b}{a^{[x]}}\cdot\frac{1}{a^{x-[x]}}<\left(\frac{x}{[x]}\right)^b\cdot\frac{[x]^b}{a^{[x]}}<2^b\,\frac{[x]^b}{a^{[x]}}\to 0.$$

3. 连续函数介值性

设偶次多项式 $P(x)=x^{2n}+a_1x^{2n-1}+\cdots+a_{2n-1}x+a_{2n}$. $a_{2n}<0$. 证明：$P(x)=0$ 至少一正根

易知 $\lim\limits_{x\to\infty}P(x)=\infty$. 即 $\exists M$. $\forall |x|\ge M$. $P(x)>1$.

则 $[0,M]$ 上. $P(0)=a_{2n}<0$, $P(M)>1$ 即 $(0,M)$ 内有根

. 一致连续

4. $f(x)\in C[a,+\infty)$. $f(+\infty)$ 存在有限. 证：$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续

即 $\forall\varepsilon$. $\exists\delta$. $\forall |x'-x''|<\delta$. $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

闭区间+连续 $\Rightarrow$ 一致连续.

即 $\forall M>a$. f 在 $[a,M]$ 上一致连续.

在 $[N,+\infty)$ 上？

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a \Rightarrow \forall\varepsilon.\ \exists N.\ \forall x',x''\ge N.\ |f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$

x',x'' 在 $[0,M]$, $[M,\infty]$ 中已得证. 若 $x'<M<x''$. 则

$|f(x')-f(x'')|\le|f(x')-f(M)|+|f(M)-f(x'')|<2\varepsilon$ → 取区间交接

或 取 $\delta<1$ $[a,M+1]$ 和 $[M,+\infty)$ 上一致连续. 则

$|x'-x''|<\delta$ 有 $x',x''\in[a,M+1]$ 或 $x',x''\in[M,+\infty]$ → 扩充区间并

5. $f(x)$ 在 R 上一致连续，则 $\exists a.b>0$. 使 $\forall x>0$. 有 $|f(x)|\le ax+b$. 反之是否成立

对 $\varepsilon=1$ $\exists\delta>0$. $\forall |x'-x''|\le\delta$ 有 $|f(x')-f(x'')|<1$

对 $\forall x>0$. 有 $0<x-[\frac{x}{\delta}]\delta<\delta$.

则 $|f(x)-f(0)|\le|f(x)-f(x-\delta)|+|f(x-\delta)-f(x-2\delta)|+\cdots+|f(x-[\frac{x}{\delta}]\delta)-f(0)|$

$< [\frac{x}{\delta}]+1$

则 $|f(x)| < |f(0)| + [\frac{x}{\delta}]+1 < \frac{1}{\delta}x + |f(0)|+1$

反之?

6. $f(x)$ 对R上所有 x 有 $f(x^2)=f(x)$. $f(x)$ 在 $x=0$, $x=1$ 处连续. 证: $f(x) = \text{Constant}$

$x>0$ 时. $f(x) = f(x^{\frac{1}{2}}) = \dots = f(x^{\frac{1}{2^n}}) = \dots$

则 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x^{\frac{1}{2^n}}) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x^{\frac{1}{2^n}}) = f(1)$

$x<0$ 时. $f(x) = f(x^2) = f(1)$

$x=0$. $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(1)$