第38讲：任意项级数审敛法

任意项级数（any term series）

（一）复习（令 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，$n\in N^*$）

(1). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ con $\Longleftrightarrow \{S_n\}$ con $\Longleftrightarrow$ Cauchy准则：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_0\in N^*$，当 $n\geq N_0$ 时且 $m>n$ 时，恒有 $|S_m-S_n|<\varepsilon$。取 $m=n+p$，$\forall p\in N^*$，则 $|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$，即 $|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon$，$\forall p\in N^*$。即对任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，若从某项开始以后，任取一段的和可任意小；则这个任意项级数必收敛。这就是级数收敛的Cauchy准则，也是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充要条件。

(2). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ con $\Longrightarrow a_n\longrightarrow 0\ (n\to\infty)$.（级数收敛的必要条件）

(3). $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ con，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 必con，称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为绝对收敛；若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ con，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ div，称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为条件收敛。

(4) 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ con，则对 $\forall m>1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^m$ 都收敛。

（从 $m\in(1,+\infty)$ 中取值的任意性知，由一个收敛的正项级数，便可得到无数个收敛的正项级数）

证(4)：已知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con，$\because a_n \to 0\ (n\to\infty)$，$\Rightarrow \forall 0<\varepsilon<1$，$\exists n_0\in N^*$

当 $n\geq n_0$ 时，$0\leq a_n<\varepsilon<1$，对 $\forall m>1$，有 $0\leq a_n^m<a_n^1\ (n\geq n_0)$

且 $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ con $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n^m$ con（比较法）$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^m$ con.

(5). 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ (a_n\geq 0)$ 满足：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho<1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con；

若 $\rho>1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ div，若 $\rho=1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 敛散性不确定.（根值法）

证(5). (1°) 当 $\rho<1$ 时，取 $\varepsilon>0$，使 $\rho+\varepsilon=\rho_0<1$，从 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho \Rightarrow \exists n_0\in N^*$

当 $n\geq n_0$ 时，$0\leq\sqrt[n]{a_n}<\rho+\varepsilon=\rho_0 \Rightarrow a_n<\rho_0^n\ (n\geq n_0)$，且 $\sum_{n=n_0}^{+\infty}\rho_0^n=\frac{\rho_0^{n_0}}{1-\rho_0}$.

$\therefore \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ con $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con.

(2°) 当 $\rho>1$ 时，取 $\varepsilon>0$ 使 $\rho-\varepsilon=\rho_0>1$，从 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho \Rightarrow \exists n_0\in N^*$

当 $n\geq n_0$ 时，$\sqrt[n]{a_n}>\rho-\varepsilon=\rho_0>1 \Rightarrow a_n>\rho_0^n\ (n\geq n_0)$ 且 $\sum_{n=n_0}^{\infty}\rho_0^n$ div.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\rho_0^n$ div，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ div；

(3°) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ div，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ con，但 ρ 都等于1。

(6). 凡可用比值法的正项级数，都可用根值法，
~~但反之未必~~。（反例：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^n}$）

证(b): (1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho$ (常数), 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ 取 $a_0=1$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_0}\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdots\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho$. 因此用比值法收敛(发散)时, 用根值法同样收敛(发散).

(2) 对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^n}$, 用根值法: $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3+(-1)^n}{2^n}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}<1$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^n}$ con; 但若用比值法, 则因 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}\frac{3+(-1)^{n+1}}{3+(-1)^n}$ 为 $1,\frac{1}{4},1,\frac{1}{4},1,\frac{1}{4},\cdots$

即 $\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\}$ 振荡发散, 得不到 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho=\frac{1}{2}<1$.

(7). Cauchy 积分判别法:

若函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 中 C, 非负, 单减, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 与反常积分 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 同敛散。

证(7): 对 $\forall n\in N^*$, 当 $n\le x\le n+1$ 时, $f(n)\ge f(x)\ge f(n+1)\ge 0$

$\Rightarrow \int_n^{n+1}f(n)dx=f(n)\ge\int_n^{n+1}f(x)dx\ge\int_n^{n+1}f(n+1)dx=f(n+1)$, $n=1,2,3,\cdots$

相加得: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)\ge\int_1^{+\infty}f(x)dx\ge\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n+1)$; 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ con.

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)\le M$. $(M>0)\Rightarrow$ 对 $\forall b>1$, $\int_1^b f(x)dx$ 有上界且单增

(3).

从而 $\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b f(x)dx$ 收敛；若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ div，则正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n+1)$ div，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n+1)=+\infty \Rightarrow \int_1^b f(x)dx$ 无界，从而 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ div。

例1. 判断下列级数的敛散性：($\alpha>0$，常数)

(1). $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n^{\alpha}}$；(2). $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln(\ln n))^{1+\alpha}}$，(3). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(e^{\frac{1}{n^2}}-1)$，

(4). $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\lambda n}{n+1}\right)^n$ ($\lambda>0$ 常数)，(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$，(6). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{\sqrt{(n^2+1)(n^3+4)}}$

解(1)：令 $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$，$x\in[2,+\infty)$，则 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上C，非负，单减，且 $\int_2^{+\infty} f(x)dx=\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^{\alpha}}=\int_2^{+\infty}\frac{d\ln x}{(\ln x)^{\alpha}}\xlongequal{\ln x=u}\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{du}{u^{\alpha}}$

当 $\alpha>1$ 时收敛；当 $\alpha\le1$ 时 div. 从而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ 当 $\alpha>1$ 时 con，当 $\alpha\le1$ 时 div.

解(2) 令 $f(x)=\frac{1}{x\ln x(\ln(\ln x))^{1+\alpha}}$，则 $f(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 上C，非负，单减，且 $\int_3^{+\infty} f(x)dx=\int_3^{+\infty}\frac{d(\ln\ln x)}{(\ln(\ln x))^{1+\alpha}}\xlongequal{\ln(\ln x)=u}\int_{\ln(\ln 3)}^{+\infty}\frac{du}{u^{1+\alpha}}$

当 $\alpha>0$ 时 con. 从而 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln(\ln n))^{1+\alpha}}$ con

(4).

解(3)：利用 $e^x-1\sim x\ (x\to0)\Rightarrow e^{\frac{1}{n^2}}-1\sim\frac{1}{n^2},\ (n\to\infty)$

且 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ con. 故 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(e^{\frac{1}{n^2}}-1)$ 绝对con.

(事实上，对于 $p>1$，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(e^{\frac{1}{n^p}}-1)$ 都绝对收敛)

解(4)：$\because \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda n}{n+1}=\lambda$，故 $0<\lambda<1$ 时，原级数收敛，当 $\lambda>1$ 时，原级数发散，当 $\lambda=1$ 时，$a_n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^n$

$=\left[\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right]^{\frac{-n}{n+1}}\to e^{-1}=\frac{1}{e}\neq0\ (n\to\infty)$，从而，原级数div。

解(5)：$\because \frac{1}{n!}<\frac{1}{(n-1)n}\ (n\geq2)$ 且 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)n}$ 收敛于1. 依比较法：

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 收敛. (后面将证明：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 收敛于 $e-1$).

解(6)：$a_n=\frac{n+5}{\sqrt{(n^2+1)(n^3+4)}}\sim\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\ (n\to\infty)$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ con.

依比较法的极限形式知，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{\sqrt{(n^2+1)(n^3+4)}}$ con.

(当 $P_m(n)$，$Q_l(n)$ 分别是 m 次，l 次 n 的多项式时，只要 $l-m>1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P_m(n)}{Q_l(n)}$ con)

(三). 交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n\ (a_n>0)$ 收敛的Leibniz判法：

只要 $a_n\downarrow0\ (n\to\infty)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ con.

证：令 $S_{2n}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{2n-1}-a_{2n})$ 则 $S_{2n}\uparrow$.

且 $S_{2n}=a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-\cdots-(a_{2n-2}-a_{2n-1})-a_{2n}\le a_1$，$\forall n\in N^*$.

从而 $\{S_{2n}\}$ 收敛. 令 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=A$ (常数). 则

$S_{2n+1}=S_{2n}+a_{2n+1}\longrightarrow A+0\ (n\to\infty)$. $\therefore\{S_n\}$ 收敛于 A.

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=A$. (con).

例2. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots$ 是交错级数,

且 $a_n=\frac{1}{n}\downarrow 0\ (n\to\infty)$. 依 Leibniz 判别法, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

$+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$ 收敛, 后面将证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln 2$.

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ div. 因此, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 条件收敛。

推广: 交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\lambda}}$ 当 $\lambda>1$ 时都绝对 con;

当 $0<\lambda\le1$ 时都条件 con.

(三) 黎曼的 ~~子~~ 定理:

Th1: 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛于 A, 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=A$ $(A>0)$.

则任意重排 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的项, 新级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_n$ 仍收敛于 A.

~~证:~~ 令 $A_n=\tilde{a}_1+\tilde{a}_2+\cdots+\tilde{a}_n$. 则 $A_n\uparrow$, 且

$\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \cdots, \tilde{a}_n$ 是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 中的一部分，故 $A_n \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$.

即 $\{A_n\}$ 单调增有上界，故 $\lim_{n\to\infty} A_n$ 存在，设 $\lim_{n\to\infty} A_n = a$，

则 $a \le A$；而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也是 $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n$ 重排后的一种，即有 $A \le a$，

从而 $a = \lim_{n\to\infty} A_n = A = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Th2：若任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛于 A，(A 为常数)，

则任意重排 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n$ 仍收敛于 A。

证 Th2：设 $a_n^+ = \frac{|a_n| + a_n}{2} = \begin{cases} a_n, & a_n > 0 \\ 0, & a_n \le 0 \end{cases}$，$a_n^- = \frac{|a_n| - a_n}{2}$，

则 $a_n^- = \begin{cases} -a_n, & a_n < 0 \\ 0, & a_n \ge 0 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 0 \le a_n^+ \le |a_n| \\ 0 \le a_n^- \le |a_n| \end{cases}$ 且 $\begin{cases} a_n^+ + a_n^- = |a_n| \\ a_n^+ - a_n^- = a_n \end{cases}$

$\Rightarrow$ 依比较法，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 皆收敛，且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 皆为正项

级数，重排后，仍有：$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$，$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$.

由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$，知 $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n^-$

$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$.

Th3. 若任意项级数条件收敛，设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xlongequal{条件} A$，($A$ 常数)

则 (1°) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty$.

(20) 令 $\begin{cases} S_n^+ = a_1^+ + a_2^+ + \cdots + a_n^+ \\ S_n^- = a_1^- + a_2^- + \cdots + a_n^- \end{cases}$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n^+}{S_n^-}=1$，即

S_n^+ 与 S_n^- 是等价无穷大。(ex7.1/13)

(31) 对条件收敛的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 进行重排，新级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_n$

可能发散，也可能收敛到任意指定的常数 α。

记7h3/(10). 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件con 知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ con 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ div.

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-$ 中有一个收敛，比如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+$ con，则从 $a_n^+-a_n^-=a_n$

$\Rightarrow a_n^-=a_n^+-a_n \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+-\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-$ 也con. 再由

$|a_n|=a_n^++a_n^-$ 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^++\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-$，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 也收敛，矛盾！

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-$ 都div，即 $S_n^+=a_1^++a_2^++\cdots+a_n^+\uparrow$ 无上界，

$S_n^-=a_1^-+a_2^-+\cdots+a_n^-\uparrow$ 无上界，从而 $\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}S_n^+=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+=+\infty, \\ \lim\limits_{n\to\infty}S_n^-=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-=+\infty,\end{cases}$

记7h3/(20) $\because \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{S_n^+}{S_n^-}-1\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n^+-S_n^-}{S_n^-}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{S_n^-}$

$=\lim\frac{A}{+\infty}=0$，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n^+}{S_n^-}=1$.

记7h3/(31). $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots \xrightarrow{\text{条件收敛}} \ln 2$.

按"一正接两负"的规律重排 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$，则有

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}+\cdots$$

设此级数部分和为 S_n，则

$$S_{3n}=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)\xrightarrow{n\to\infty}\frac{\ln 2}{2}.$$

且 $S_{3n-1}=S_{3n}+\frac{1}{4n}\longrightarrow\frac{1}{2}\ln 2+0=\frac{1}{2}\ln 2.$

$S_{3n-2}=S_{3n-1}+\frac{1}{4n-2}\to\frac{1}{2}\ln 2$． 故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}\ln 2$

即 $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}+\cdots=\frac{1}{2}\ln 2.$

利用：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\gamma_0+\ln n+\alpha_n$ （$\gamma_0\approx 0.5772$，$\alpha_n\to 0$）．

可以得到：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 按"p个正接q个负"规律重排．($p,q\in\mathbb{N}^*$)

则新级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_n=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$。（严格证明见Th7.17）

(四) 作业：ex7.1：2(8),(12),(14),(15),(16),3；11；

12(3),(5),(7)；13.