

第37讲: 正项级数 (positive series) 审敛法

(一) 无穷级数的基本概念:

形: $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为无穷级数, 符号和。

$a_1 + a_2 + \dots + a_n \triangleq S_n$ 为无穷级数的部分和。若

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = A$ (常数) 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛于 A ; 若

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 发散, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散 (divergence)。若

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛于常数 A 时, 记作: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ (convergence)

此时必有 $a_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow A - A = 0$ ($n \rightarrow \infty$), 即

通项 $a_n \rightarrow 0$ 是 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的必要条件。

(二) 无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的基本性质:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\iff \{S_n\}$ 收敛 $\iff \{S_n\}$ 为 Cauchy 列 $\iff \forall \epsilon > 0,$

$\exists N \in \mathbb{N}^*$, 当 $m > n > N$ 时, $|S_m - S_n| < \epsilon$, 即 $|S_{m+1} - S_{n+1}| < \epsilon, \forall p \in \mathbb{N}^*$;

(2) 添加或去掉有限项, 不影响 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性;

①



(3) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ (收敛), 则对 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的项任意加括号后所得的新级数收敛, 且收敛于 A .

证(3). 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 加括号后为: $a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + (a_6 + a_7 + a_8) + (a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12}) + \dots$

设 $b_1 = a_1, b_2 = a_2 + a_3, b_3 = a_4 + a_5, b_4 = a_6 + a_7 + a_8, b_5 = a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12}, \dots$

加括号后的新级数设为 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, 部分和为 $T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$, 且 $T_1 = b_1 = a_1 = S_1$,

$T_2 = b_1 + b_2 = a_1 + (a_2 + a_3) = S_3, T_3 = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) = S_5,$

$T_4 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = S_8, T_5 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = S_{12},$ 即 $\{T_n\}$

是 $\{S_n\}$ 的子列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = A = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ (子列性质)

即 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = A$. 即加括号后的新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛于 A .

即 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = A$. 即加括号后的新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛于 A .

(E) 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$) 的审敛法:

Th1: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 \iff 部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界;

Th2: 两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的审敛法. (2)



● 设 $0 \leq a_n \leq b_n, \forall n \geq n_0 \in \mathbb{N}^*$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 必收敛.

换言之, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 必发散.

TH3: 正项级数比较审敛法的极限形式: 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都为正项级数且 $b_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A$.

● (1) 若 $0 < A < +\infty$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同敛散, 特别若 $A=1$ 时有 $a_n \sim b_n (n \rightarrow \infty)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 同敛散.

(2) 若 $A=0$ 时, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 必收敛;

(3) 若 $A=+\infty$ 时, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 必收敛。

● TH4: 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n > 0)$ 的比值审敛法: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, $\rho > 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 必发散; $\rho=1$

时不能确定 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性, 如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛.

且两者 ρ 都等于 1.

● TH5: 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的根值审敛法: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho < 1$ (3)



则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 若 $p > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 若 $p = 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛
 性不确定, 如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 都有 $p=1$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散,
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛.

Th6: 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的积分判别法 (Cauchy)

若 $f(x) \in [1, +\infty) \subset \mathbb{C}$, 单减, 连续, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 同
 敛散.

证法: $\because \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 $\iff \{S_n\}$ 收敛, 而 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 单增.

故若 $\{S_n\}$ 有界, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 收敛 $\iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

证法: $\forall \sum S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, T_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$. 且 $0 \leq a_n \leq b_n, n \geq 1$.

则 $S_n \leq T_n$. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, $\{T_n\}$ 有界 $\implies \{S_n\}$ 有界.

$\implies \{S_n\}$ 收敛, $\iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

证法: 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A \neq 0$, 若 $0 < A < +\infty$ 时, 对 $\varepsilon = \frac{A}{2} > 0, \exists$

$N_0 \in \mathbb{N}^*$, 若 $n > N_0$ 时, $A - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < A + \varepsilon$ 即 $\frac{A}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3A}{2} \implies$

(*)



• $\frac{A}{2}b_n < a_n < \frac{3}{2}Ab_n$. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 (convergence), 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2}Ab_n$

con, 比较法, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con; 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散 (divergence), 则

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{2}b_n$ div, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ div;

(2) 若 $A=0$ 时, $\exists \{n_0 \in \mathbb{N}^*\}$, 若 $n > n_0$ 时, $\frac{a_n}{b_n} < 1 \Rightarrow 0 \leq a_n < b_n$.

• 若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ con 时, 必有 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con;

(3) 若 $A=+\infty$ 时, $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$, 从 (2) 知, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con 时,

必有 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ con.

证法: (1) 若 $0 \leq p < 1$ 时 取 $\varepsilon > 0$, 使 $p + \varepsilon = p_0 < 1$. 对

ε_0 , $\exists \{n_0 \in \mathbb{N}^*\}$, 若 $n > n_0$ 时, $0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < p + \varepsilon = p_0 \Rightarrow a_{n+1} < p_0 a_n$,

即 $a_{n_0+1} < p_0 a_{n_0}$, $a_{n_0+2} < p_0 a_{n_0+1} < p_0^2 a_{n_0}$, $a_{n_0+3} < p_0 a_{n_0+2} < p_0^3 a_{n_0}$,

$\dots a_{n_0+m} < p_0^m a_{n_0}$ 且由 $0 < p_0 < 1$ 知, 该级数 $\sum_{m=1}^{\infty} p_0^m a_{n_0}$

收敛. 比较法, $\sum_{m=1}^{\infty} a_{n_0+m}$ con $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con.

• (2) 若 $p > 1$ 时, 取 $\varepsilon > 0$, 使 $p - \varepsilon = p_0 > 1$ 对 ε_0 , $\exists \{n_0 \in \mathbb{N}^*\}$ (5)



• 当 $n \geq n_0$ 时, $\frac{a_{n+1}}{a_n} > \rho - \varepsilon = \rho_0 > 1 \Rightarrow a_{n+m} > \rho_0^m a_n, m=1, 2, \dots$

且由 $\rho_0 > 1$ 知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_0^n a_{n_0} \text{ div} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{n_0+m} \text{ div}$
 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ div}.$

证法: (1) 当 $\rho < 1$ 时, 对 $\varepsilon > 0$, 使 $\rho + \varepsilon = \rho_0 < 1$ 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}^*$

• 当 $n \geq n_0$ 时, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} < \rho + \varepsilon = \rho_0 < 1 \Rightarrow a_n < \rho_0^n$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_0^n \text{ con} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ con};$

(2) 当 $\rho > 1$ 时, 对 $\varepsilon > 0$, 使 $\rho - \varepsilon = \rho_0 > 1$, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}^*$, 当

$n \geq n_0$ 时, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \geq \rho - \varepsilon = \rho_0 > 1 \Rightarrow a_n \geq \rho_0^n$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_0^n \text{ div} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ div}.$

证法: 对 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, 当 $n < x \leq n+1$ 时, 有 $f(n) \geq f(x) \geq f(n+1)$

从而 $f(n) = \int_n^{n+1} f(x) dx \geq \int_n^{n+1} f(x) dx \geq \int_n^{n+1} f(n+1) dx = f(n+1), n=1, 2, 3, \dots$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^m f(n) \geq \int_1^{m+1} f(x) dx \geq \sum_{n=1}^m f(n+1)$

• (1) 当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ con 时, $\sum_{n=1}^m f(n)$ 有上界 $\Rightarrow \int_1^{m+1} f(x) dx$
 亦有上界. 从而 $\int_1^{+\infty} f(x) dx \text{ con};$ (6)



(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} f(n+1)$ 也收敛, 且 $\sum_{n=1}^m f(n+1)$

无界 $\Rightarrow \int_1^{m+1} f(x) dx$ 无界 $\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x) dx$ 无界。

例题:

(1) 证明: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。若这时

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为绝对收敛, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ 而 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, 若这时

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为条件收敛; 如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 收敛于 $\ln 2$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} < \infty$ 。

(2) 证明: p -级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 当 $p \leq 1$ 时 $< \infty$; 当 $p > 1$ 时

$< \infty$. 如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$. (见 ch12 证明)

(3). 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, A, B 为常数, 则对 $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

有 $\sum_{n=1}^{\infty} (c_1 a_n + c_2 b_n) = c_1 \sum_{n=1}^{\infty} a_n + c_2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n = c_1 A + c_2 B$.

证(1): 令 $\begin{cases} b_n = \frac{|a_n| + a_n}{2} \\ c_n = \frac{|a_n| - a_n}{2} \end{cases}$ 则 $\begin{cases} 0 \leq b_n \leq |a_n| \\ 0 \leq c_n \leq |a_n| \end{cases}$

从 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ 知 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$. 而 $a_n = 2b_n - |a_n|$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$. $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

证(2)(i). 当 $p=1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的部分和 $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \sim \ln n$

(1).

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = +\infty$, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散到 $+\infty$.

(2) 当 $0 < p < 1$ 时, $\frac{1}{n} < \frac{1}{n^p}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 当 $0 < p < 1$ 时发散, 当 $p \leq 0$ 时, $\because a_n = \frac{1}{n^p} = n^p$

$\rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$), 故不满足收敛的必要条件, $\therefore p \leq 0$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散.

(3) 当 $p > 1$ 时, 取 $f(x) = \frac{1}{x^p}$, $x \in [1, +\infty)$, 则 $f(x) \in [1, +\infty) \cap C$,

单调递减, 且 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ 收敛于 $\frac{1}{p-1}$, 依积分判别法,

$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 也收敛.

证(3): 设 $\sum_{m=1}^n a_m = S_n$, $\sum_{m=1}^n b_m = T_n$, 则 $\sum_{m=1}^n (c a_m + d b_m) =$

$c S_n + d T_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c A + d B \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} (c a_m + d b_m) = c A + d B$.

即 $\sum_{n=1}^{\infty} (c a_n + d b_n) = c A + d B = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n + d \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(4) 例: ex 7.1: (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9), (10), (11), (12), (13), (14), (15), (16), (17), (18), (19), (20), (21), (22), (23), (24), (25), (26), (27), (28), (29), (30), (31), (32), (33), (34), (35), (36), (37), (38), (39), (40), (41), (42), (43), (44), (45), (46), (47), (48), (49), (50), (51), (52), (53), (54), (55), (56), (57), (58), (59), (60), (61), (62), (63), (64), (65), (66), (67), (68), (69), (70), (71), (72), (73), (74), (75), (76), (77), (78), (79), (80), (81), (82), (83), (84), (85), (86), (87), (88), (89), (90), (91), (92), (93), (94), (95), (96), (97), (98), (99), (100).

(8)

