第36讲：第6章复习小结与习题课

(一) 四种一阶可积方程：

(1). $y'=f(x,y)=g(x)\cdot h(y)$, $g,h\in C$（可分离变量），当 $h(y)\neq 0$ 时

$\int\frac{dy}{h(y)}=\int g(x)dx$ 为通解，$h(y)=0$ 的根为特解.

齐次方程

(2) $y'=g(\frac{y}{x})$, $g\in C$, 只要设 $\frac{y}{x}=u$，即化为可分离变量

一阶线性方程

(3). $y'+p(x)y=Q(x)$, $p,Q\in C(I)$. 有通解公式：

$$y(x)=e^{-\int p(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)=Ce^{-\int p(x)dx}+e^{-\int p(x)dx}\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx=\bar{y}+y^*$$

(4). $y'+p(x)y=Q(x)y^n$ ($n\neq 0,1$, $n\in R$) 称为贝努利Bernoulli方程，

同除以 y^n: $y^{-n}y'+p(x)y^{1-n}=Q(x)$，令 $y^{1-n}=u(x)\Rightarrow(1-n)y^{-n}y'=u'(x)$

原方程化为一阶线性方程：$u'(x)+(1-n)p(x)u=(1-n)Q(x)$

$$u(x)=y^{1-n}(x)=e^{-(1-n)\int p(x)dx}\left(\int(1-n)Q(x)e^{(1-n)\int p(x)dx}dx+C\right)\Rightarrow$$

$$y(x)=e^{-\int p(x)dx}\left(\int(1-n)Q(x)e^{(1-n)\int p(x)dx}dx+C\right)^{\frac{1}{1-n}}$$ 为所求通解.

(二) ~~四~~三种二阶可积方程

(1) 常系数二阶线性方程：$y''+ay'+by=f(x)$. (※1)

(2). Euler方程：$x^2y''+axy'+by=f(x)$ $(x\neq 0)$ (※2)

(3) 可降阶的二阶 ODE：$y''=f(x,y')$，$y''=f(y,y')$ 且

$u'=f(x,u)$ 或 $u\frac{du}{dy}=f(y,u)$ 是四种可积一阶 ODE 中的一种.

(※1)，(※2)中，a,b 为常数 $f\in C(I)$.

(三). 解下列方程：

(1). $y'=f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$，$f$ 为连续函数. a_i,b_i,c_i 为常数.

(2). $x^2y''-2xy'+2y=2x^3$，(3) $f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)dt$，

(4). $y=y(x)$ 满足 $y''-3y'+2y=2e^x$，且 $y(x)$ 的图像在点 $M(0,1)$ 处

与曲线 $y=x^2-x+1$ 相切，求 $y(x)$.

(5) $\begin{cases} yy''-(y')^2=y^4 \\ y(0)=1,\ y'(0)=1 \end{cases}$，(6). $y^{(3)}-3y^{(2)}+4y^{(1)}-2y=0$

解(1)：(1°) 当 $c_1=c_2=0$ 时，$y'=f(\frac{a_1+b_1\frac{y}{x}}{a_2+b_2\frac{y}{x}})=g(\frac{y}{x})$ 为齐次方程.

令 $\frac{y}{x}=u \Rightarrow y'=u+xu'=f(\frac{a_1+b_1u}{a_2+b_2u})$

当 $f\left(\frac{a_1+b_1u}{a_2+b_2u}\right)-u\neq 0$ 时，$\int\frac{du}{f\left(\frac{a_1+b_1u}{a_2+b_2u}\right)-u}=\int\frac{dx}{x}=\ln x+\ln C=\ln xC$.

2° 当 $c_1^2+c_2^2\neq 0$ 时，若 $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$，则 $\begin{cases} a_1x+b_1y=-c_1 \\ a_2x+b_2y=-c_2 \end{cases}$ 有唯一

解 $x_0=\frac{D_1}{D}$，$y_0=\frac{D_2}{D}$. 令 $\begin{cases} X=x-x_0 \\ Y=y-y_0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=x_0+X \\ y=y_0+Y \end{cases}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dX}$

$=f\left(\frac{a_1(x_0+X)+b_1(y_0+Y)+c_1}{a_2(x_0+X)+b_2(y_0+Y)+c_2}\right)=f\left(\frac{a_1X+b_1Y+(a_1x_0+b_1y_0+c_1)}{a_2X+b_2Y+(a_2x_0+b_2y_0+c_2)}\right)=f\left(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\right)$

已化为1°的情形.

若 $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$ 则 $a_1b_2=a_2b_1\Rightarrow\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=k\Rightarrow\begin{cases} a_1=a_2k \\ b_1=b_2k \end{cases}\Rightarrow$

$y'=f\left(\frac{k(a_2x+b_2y)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$，令 $a_2x+b_2y=u$ 则 $a_2+b_2y'=u'$

当 $b_2\neq 0$ 时，$y'=\frac{u'-a_2}{b_2}=f\left(\frac{ku+c_1}{u+c_2}\right)\Rightarrow\frac{du}{dx}=a_2+b_2f\left(\frac{ku+c_1}{u+c_2}\right)$

是可分离变量~，当 $b_2=0$ 时 $\Rightarrow b_1=b_2k=0\Rightarrow y'=f\left(\frac{a_1x+c_1}{a_2x+c_2}\right)$ 为

可分离变量方程.

解(2)：设 $x>0$ (<0). 令 $x=e^t$，$(x=-e^t)\Leftrightarrow t=\ln x$，$(t=\ln(-x))$

则 $\begin{cases} y'_x=y'_t\cdot t'_x=y'_t\cdot\frac{1}{x}\Leftrightarrow xy'_x=y'_t, \\ y''_{xx}=(y'_t\frac{1}{x})'_x=y''_{tt}t'_x\frac{1}{x}+y'_t\frac{-1}{x^2}=y''_{tt}\left(\frac{1}{x}\right)^2-y'_t\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow x^2y''_{xx}=y''_{tt}-y'_t \end{cases}$

原方程化为：$y''_{tt}-3y'_t+2y=2e^{3t}$ (*3)

①齐次方程 $y''_{tt}-3y'_t+2y=0$ 的特征方程：$\lambda^2-3\lambda+2=0\Rightarrow$

$(\lambda-1)(\lambda-2)=0\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=2$，$y_1(t)=e^{t}$，$y_2(t)=e^{2t}$ 是基本解组，

$W(t)=\begin{vmatrix} e^t & e^{2t}\\ e^t & 2e^{2t}\end{vmatrix}=e^{3t}>0$　$f(t)=2e^{3t}$

②(*3)的特解 $y^*(t)$：

$$y^*(t)=\int_0^t \frac{y_1(s)y_2(t)-y_2(s)y_1(t)}{W(s)}f(s)ds=\int_0^t\frac{e^se^{2t}-e^{2s}e^t}{\cancel{e^{3s}}}\cdot 2\cancel{e^{3s}}ds$$

$$=2e^{2t}\int_0^t e^s ds-2e^t\int_0^t e^{2s}ds=2e^{2t}(e^t-1)-2e^t\frac{1}{2}(e^{2t}-1)=e^{3t}-2e^{2t}+e^t$$

③(*3)的通解 $y(t)=c_1e^t+c_2e^{2t}+e^{3t}-2e^{2t}+e^t$，回代：$e^t=x$

原方程通解为：$y(x)=k_1x+k_2x^2+x^3$　$(k_1=c_1+1,k_2=c_2-2)$

（注：(2)还有两种不同的解法，请同学们思考还有什么样的解法？）

解(3)：将积分方程化为微分方程：

$$f'(x)=(\sin x)'-\left(x\int_0^x f(t)dt\right)'+\left(\int_0^x tf(t)dt\right)'=\cos x-\int_0^x f(t)dt-xf(x)+$$

$$xf(x)=\cos x-\int_0^x f(t)dt\Rightarrow f'(0)=\cos 0-\int_0^0 f(t)dt=1$$ 且

$$f''(x)=-\sin x-f(x)\Rightarrow\begin{cases} f''(x)+f(x)=0-\sin x=-\sin x\\ f(0)=0,f'(0)=1\end{cases}$$

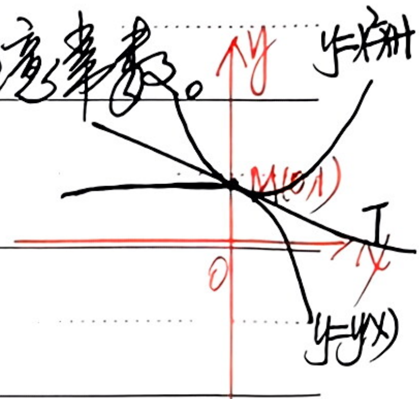
(4).

综上述非齐次线性方程的初值问题，可得唯一解

$f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}x\cos x$.

另外，二阶线性方程的初值问题：$\begin{cases} y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)\\ y(x_0)=\alpha,\ y'(x_0)=\beta\end{cases}$

之解都存在且唯一。$x_0\in I$，α,β 为任意常数。



解(4)：由题意知：$\begin{cases} y''-3y'+2y=2e^x \\ y(0)=1,\ y'(0)=-1\end{cases}$

1° 齐次方程 $y''-3y'+2y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2-3\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda_1=1,\lambda_2=2$.

$y_1(x)=e^x$，$y_2=e^{2x}$ 是 $y''-3y'+2y=0$ 的一个基本解组。$W(x)=\begin{vmatrix} e^x & e^{2x}\\ e^x & 2e^{2x}\end{vmatrix}$

$=e^{3x}>0 \Rightarrow \bar{y}(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}$

2° $y^*(x)=\int_0^x \frac{y_1(t)y_2(x)-y_2(t)y_1(x)}{W(t)}f(t)dt=\int_0^x \frac{e^te^{2x}-e^{2t}e^x}{e^{3t}}2e^t dt$

$=2(e^{2x}\int_0^t e^{-t}dt-e^x\int_0^x 1dt)=2(e^{2x}-e^x-xe^x)$

3° $y(x)=\bar{y}(x)+y^*(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}+(-2)e^x+2e^{2x}-2xe^x=k_1e^x+k_2e^{2x}-2xe^x$

$k_1=C_1-2$，$k_2=C_2+2$. $y'(x)=k_1e^x+2k_2e^{2x}-2e^x-2xe^x$

从 $\begin{cases}1=y(0)=k_1+k_2\\ -1=y'(0)=k_1+2k_2-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_1=1\\ k_2=0\end{cases}$ ~~$\Rightarrow y(x)=-e^x+2e^{2x}-2xe^x$~~ $\begin{cases}k_1=1\\ k_2=0\end{cases}$

$\Rightarrow y(x)=e^x-2xe^x=e^x(1-2x)$ 为所求函数。

(5)

解(5)：$y''=f(y,y')$ 型，缺 x，设 $y'_x=u$，则 $y''_{xx}=\frac{d(y'_x)}{dx}=\frac{d(y'_x)}{dy}\frac{dy}{dx}$

$=\frac{du}{dy}u$ ⇒ 原方程化为：$yu\frac{du}{dy}-u^2=y^4 \Rightarrow \frac{du}{dy}-\frac{1}{y}u=y^3u^{-1}$

这为 $n=-1$ 的 Bernoulli 方程，两端同乘以 u：$u\frac{du}{dy}-\frac{1}{y}u^2=y^3$.

令 $u^2=V(y)$，则 $2u\frac{du}{dy}=V'(y) \Rightarrow u\frac{du}{dy}=\frac{1}{2}V'(y)\Rightarrow$

$\frac{1}{2}V'(y)-\frac{1}{y}V=y^3\Rightarrow V'(y)-\frac{2}{y}V=2y^3. \Rightarrow \begin{cases}P(y)=-\frac{2}{y}\\ Q(y)=2y^3\end{cases} \Rightarrow$ 通解

$V(y)=e^{-\int P(y)dy}\left(\int Q(y)e^{\int P(y)dy}dy+C_1\right)=e^{\int\frac{2}{y}dy}\left(\int 2y^3e^{-\int\frac{2}{y}dy}dy+C_1\right)$

$=y^2\left(\int 2y^3\times\frac{1}{y^2}dy+C_1\right)=y^2(y^2+C_1)$，而 $y=1$ 时 $u=1\Rightarrow V=1$

$\Rightarrow 1=1^2(1^2+C_1)\Rightarrow C_1=0$，$\Rightarrow V(y)=u^2=y^4\Rightarrow u=\pm y^2$

但 $u=-y^2$ 不合题意（舍去），从 $u=y^2$ 即 $y'=y^2$ 为可分离变量

$\int_1^y\frac{dy}{y^2}=\int_0^x dx=x$ 即 $\int_1^y y^{-2}dy=\frac{y^{-1}}{-1}\Big|_1^y=x\Rightarrow 1-\frac{1}{y}=x\Rightarrow$

$y=\frac{1}{1-x}$ 为所求的唯一解。

第(5)题涉及一阶 Bernoulli 方程、一阶线性方程、一阶可分离变量方程，难度稍大，另外要注意化简常数 C_1, C_2 比较方便。

解(6) 这是三阶线性常系数齐次方程，适用特征方程法.

特征方程为：$\lambda^3-3\lambda^2+4\lambda-2=0$，因所有系数之和为零，故

必有特征根 $\lambda=1$ 从而，有 $\lambda^3-\lambda^2-2\lambda^2+2\lambda+2\lambda-2=0$

$\Rightarrow(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+2)=0\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=1-i,\lambda_3=1+i$

基本解组为 $y_1(x)=e^{1x}$，$y_2(x)=e^{1x}\cos x$，$y_3(x)=e^{1x}\sin x$. 齐通解为

$y(x)=C_1e^{x}+e^{x}(C_2\cos x+C_3\sin x)$

(四). 证明题：(思考题)

设 $y_1(x),y_2(x),y_3(x)$ 是二阶 LODE：$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)\neq0$ 的三个

线性无关解.

(1) 证明此 LODE 有通解：$y(x)=C_1(y_2-y_1)+C_2(y_3-y_1)+y_1(x)$，

其中 C_1,C_2 为任意常数.

(2) 证明：此 LODE 由 $y_1(x),y_2(x),y_3(x)$ 唯一确定，即用 $y_1(x),y_2(x)$

$y_3(x)$ 可唯一确定系数 $p(x),q(x)$ 及扰动项 $f(x)$。

(五)提高题：

(1) 求解微分方程组(线性)：$\begin{cases} y'_x = 3y - 2z \\ z'_x = 2y - z \end{cases}$

(2) 求 $y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0$ 的通解.

解(1) ∵ $\begin{cases} y'' = 3y' - 2z' \\ z' = 2y - z \end{cases} \Rightarrow y'' - 3y' = -2(2y - z) = -4y + 2z = -4y + (3y - y')$

$\Rightarrow y'' - 2y' + y = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$，$y(x) = e^{1x}(C_1 + C_2 x)$

$z(x) = \frac{1}{2}(3y - y') = \frac{1}{2}(e^x(3C_1 + 3C_2 x) - e^x(C_1 + C_2 x) - e^x C_2) = (C_1 - \frac{1}{2}C_2)e^x + C_2 x e^x$

即线性微分方程组的通解为 $\begin{cases} y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x \\ z(x) = (C_1 - \frac{1}{2}C_2)e^x + C_2 x e^x \end{cases}$; C_1, C_2 是独立常数。

解(2). 对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda^2 + 1)^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -i$，$\lambda_3 = \lambda_4 = i$. 对应方程的基础解组为

$e^{0x}\cos x, e^{0x}\sin x, e^{0x}x\cos x, e^{0x}x\sin x$. 所求通解为：

$y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3 x\cos x + C_4 x\sin x$.

(六) 作业：ex6.1 / 3(1),(2)； 4/(5),(6)；

ex6.2 / 9(1),(2),(4).

IV. 附：五类一阶可积ODE的关系图：

可分离变量方程：$y'=f(x,y)=g(x)\cdot h(y)$ —— 最基本的ODE.

可分离变量方程 $\xrightarrow{h(y)\neq0}$ $\int\frac{dy}{h(y)}=\int g(x)dx$

$h(y)=0$的根为特解 ← 可分离变量方程

齐次方程：$y'=g(\frac{y}{x})$ $\xrightarrow{令\ \frac{y}{x}=u}$ 可分离变量方程

一阶线性方程：$y'+p(x)y=Q(x)$ → 可分离变量方程

Bernoulli方程：$y'+p(x)y=Q(x)y^n$，$(n\neq0,1)$，$n\in R$ $\xrightarrow{令\ y^{1-n}=u(x)}$ 一阶线性方程

Riccati方程：$(P\neq0)$

$y'=P(x)y^2+Q(x)y+R(x)$

已知有特解：$y=g(x)$

Riccati方程 $\xrightarrow{令\ y=u+g(x)}$ Bernoulli方程

V. 附：二阶线性ODE解之间的关系：

$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)\neq0$. (非)　$p,q,f\in C(I)$.

$y''+p(x)y'+q(x)y=0$　(齐).

只要知道(齐)的一个非零解 $y_1(x)$，($y_1(x)$常用特征根法求出)

利用Liouville公式：$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)}dx$，即可得到(齐)的通解

$\bar{y}(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$. 再利用Lagrange的常数变易法，求得

(非)的通解：$y(x)=\bar{y}(x)+y^*(x)=C_1y_1+C_2y_2+\int_{x_0}^{x}\frac{y_1(t)y_2(x)-y_2(t)y_1(x)}{W(t)}f(t)dt$

其中，$W(t)=\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t)\\ y_1'(t) & y_2'(t)\end{vmatrix}\neq0$，$t\in I$. $x_0,x\in I$.