第25讲：二阶线性常系数常微分方程的一般解法

(0) 预备知识：

(1). 设线性代数方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$

令 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$

当 $D\neq 0$ 时，有 $x_1=\frac{D_1}{D}$，$x_2=\frac{D_2}{D}$.（唯一解）

(2) 线性代数齐次方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=0 \end{cases}$.

当 $D\neq 0$ 时有唯一零解 $x_1=0, x_2=0$；当 $D=0$ 时，有非零解。

以上结论可推广到 n 个变量，n 个方程的情形。

(3). 一阶线性ODE初值问题 $\begin{cases} y'+p(x)y=Q(x), \ p,Q\in C(I) \\ y(x_0)=\alpha_0, \ x_0\in I \end{cases}$

其有唯一解：$y=e^{-\int_{x_0}^{x}p(s)ds}\left(\int_{x_0}^{x}Q(x)e^{\int_{x_0}^{x}p(s)ds}dx+\alpha_0\right)$

(4) 二阶线性ODE初值问题：$\begin{cases} y''+p(x)y'+q(x)y=f(x), \ p,q,f\in C(I) \\ y(x_0)=\alpha_0, \ y'(x_0)=\beta_0, \ x_0\in I \end{cases}$

存在唯一的解.

(5) n阶线性ODE初值问题 $\begin{cases} y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x) \\ y(x_0)=\alpha_0, \ y'(x_0)=\alpha_1, \ \cdots \ y^{(n-1)}(x_0)=\alpha_{n-1} \end{cases}$

存在唯一的解。

(一) 复习：(设 $p, q, f \in C(I)$)

设 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)\not\equiv 0$. (★1)

$y''+p(x)y'+q(x)y=0$ (★2)

LODE 的叠加原理!

且 $y_1(x), y_2(x)$ 是(★2)的一个基本解组，$y^*(x)$ 是(★1)的一个特解.

则(★2)的通解为 $\bar{Y}(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$, (★3)

(★1)的通解为 $y=\bar{Y}(x)+y^*(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+y^*(x)$. (★4)

(二) 求(★1)特解 $y^*(x)$ 的常数变易法：(Lagrange)

设 $y(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$ 是(★1)的解，代入(★1)可定出 $C_1(x), C_2(x)$.

由 $y'=C_1'y_1+C_2'y_2+C_1y_1'+C_2y_2'$，为方便计，令 $C_1'y_1+C_2'y_2=0$ …… (*)

则 $y'=C_1y_1'+C_2y_2' \to y''=C_1'y_1'+C_2'y_2'+C_1y_1''+C_2y_2''$ 将上述 y, y', y''

代入(★1)：

$C_1'y_1'+C_2'y_2'+C_1y_1''+C_2y_2''+p(C_1y_1'+C_2y_2')+q(C_1y_1+C_2y_2)=f \Leftrightarrow$

$C_1\underbrace{(y_1''+py_1'+qy_1)}_{0}+C_2\underbrace{(y_2''+py_2'+qy_2)}_{0}+C_1'y_1'+C_2'y_2'=f$ …… (*2)

联立 $\begin{cases} C_1'y_1+C_2'y_2=0 \\ C_1'y_1'+C_2'y_2'=f \end{cases}$ 且 $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=W(x)\neq 0, \forall x\in I$.

$$\Rightarrow C_1'(x)=\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}\Big/W(x)=-\frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}\Rightarrow C_1(x)=-\int_{x_0}^{x}\frac{y_2(t)f(t)}{W(t)}dt$$

$$C_2'(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix}\Big/W(x)=\frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}\Rightarrow C_2(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{y_1(t)f(t)}{W(t)}dt$$

所求特解为：$y^*(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)=-\int_{x_0}^{x}\frac{y_1(x)y_2(t)}{W(t)}f(t)dt+$

$$\int_{x_0}^{x}\frac{y_1(t)y_2(x)}{W(t)}f(t)dt=\int_{x_0}^{x}\frac{y_1(t)y_2(x)-y_2(t)y_1(x)}{W(t)}f(t)dt. \quad (*5)$$

(三) 求下列方程的通解

(1). $y''+6y'+9y=2023$;　(2). $y''+3y'-4y=e^{2x}$

(3). $y''+2y'+5y=\alpha_0$ (α_0是常数)

解(1): 显然，(1)有特解 $y^*(x)=\frac{2023}{9}$.

(2). $y''+6y'+9y=0$ 猜想有形如 $y(x)=e^{\lambda x}$ (λ是常数)的解，

$$\Rightarrow (e^{\lambda x})''+6(e^{\lambda x})'+9e^{\lambda x}=0\Rightarrow \lambda^2e^{\lambda x}+6\lambda e^{\lambda x}+9e^{\lambda x}=0$$

$$(\lambda^2+6\lambda+9)\cdot e^{\lambda x}=0\Rightarrow \lambda^2+6\lambda+9=0 \quad (*3)$$

称AE：$\lambda^2+6\lambda+9=0$ 是齐次ODE：$y''+6y'+9y=0$ 的特征方程，并称 $\lambda_1=\lambda_2=-3$ 为特征根

$y''+6y'+9y=0$ 有非零解 $y_1(x)=e^{-3x}$. 由Liouville公式

$$y_2(x)=y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}dx=e^{-3x}\int\frac{e^{-\int 6dx}}{e^{-6x}}dx=e^{-3x}\int\frac{e^{-6x}}{e^{-6x}}dx=$$

xe^{-3x} 是 $y''+6y'+9y=0$ 的与 $y_1(x)$ 线性无关的另一个解.

即 $y_1(x)=e^{-3x}$, $y_2(x)=xe^{-3x}$ 是 $y''+6y'+9y=0$ 的基解组.

齐通解 $\bar{y}(x)=c_1e^{-3x}+c_2xe^{-3x}=e^{-3x}(c_1+c_2x)$.

由LODE解的叠加原理知. 所求通解为

$$y(x)=\bar{y}(x)+y^*(x)=e^{-3x}(c_1+c_2x)+\frac{2023}{9}.$$

解(2): (1°) 齐次方程: $y''+3y'-4y=0$ 的特征方程为

$\lambda^2+3\lambda-4=0\Rightarrow(\lambda+4)(\lambda-1)=0\Rightarrow\lambda_1=-4,\lambda_2=1$. 从而

$y_1(x)=e^{-4x}$, $y_2(x)=e^{x}$ 是: $y''+3y'-4y=0$ 的基解组. $W(x)=\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix}e^{-4x} & e^{x}\\ -e^{-4x} & e^{x}\end{vmatrix}=e^{-3x}+e^{-3x}=2e^{-3x}\neq0$. 且 $f(x)=e^{2x}\Rightarrow$

齐通解 $\bar{y}(x)=c_1e^{-4x}+c_2e^{x}$, 非齐特解 $y^*(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{y_1(t)y_2(x)-y_2(t)y_1(x)}{W(t)}f(t)dt$

$$=\int_0^x\frac{e^{-4t}e^{x}-e^{t}e^{-4x}}{2e^{-3t}}e^{2t}dt=\frac{e^{x}}{2}\int_0^x e^{t}dt-\frac{e^{-4x}}{2}\int_0^x e^{6t}dt$$

$$=\frac{e^{x}}{2}(e^{x}-1)-\frac{e^{-4x}}{2\times6}(e^{6x}-1)=\frac{5}{12}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{x}+\frac{1}{12}e^{-4x}.$$

故原方程的通解为：

$y(x)=\bar{y}(x)+y^*(x)=C_1e^{-4x}+C_2e^{x}+\frac{5}{12}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{x}+\frac{1}{12}e^{-4x}$

解(3)：(1°) 原方程有特解 $y^*(x)=\frac{\alpha_0}{5}$，

(2°) 下求齐次方程 $y''+2y'+5y=0$ 的通解，

特征方程 $\lambda^2+2\lambda+5=0 \Rightarrow (\lambda+1)^2=-4 \Rightarrow \lambda+1=\pm 2i$

$\lambda_1=-1-2i$，$\lambda_2=-1+2i \Rightarrow y_1(x)=e^{(-1-2i)x}$，$y_2(x)=e^{(-1+2i)x}$ 是

$y''+2y'+5y=0$ 的基解组，利用 $\begin{cases} y_1(x)=e^{-x}e^{-2ix}=e^{-x}(\cos 2x-i\sin 2x) \\ y_2(x)=e^{-x}e^{2ix}=e^{-x}(\cos 2x+i\sin 2x) \end{cases}$

易知 $z_1(x)=\frac{1}{2}y_1(x)+\frac{1}{2}y_2(x)=e^{-x}\cos 2x$ 及 $z_2(x)=\frac{1}{2i}y_2(x)-\frac{1}{2i}y_1(x)=e^{-x}\sin 2x$

仍是 $y''+2y'+5y=0$ 的一个基解组，从而齐次通解为

$\bar{y}(x)=C_1z_1(x)+C_2z_2(x)=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$，

原方程的通解是：$y=\bar{y}+y^*=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+\frac{\alpha_0}{5}$.

(四) 求下列方程的解：

(1). $\begin{cases} yy''-(y')^2=y^4 \\ y(0)=1,\ y'(0)=1, \end{cases}$ (2) $x^2y''-2xy'-4y=x^4$ $(x>0)$

解(1). 这是非线性方程，属于 $y''=f(y,y')$ 缺 x 型.

令 $y'=u$，则 $y''=\frac{d(y')}{dx}=\frac{dy'}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dy}\cdot u$，原方程化为

$y u\cdot u'_y-u^2=y^4 \Rightarrow u'_y-\frac{1}{y}u=y^3u^{-1}$ 是 $n=-1$ 的 Bernoulli 方程.

各项同乘以 u^{-1}：$uu'_y-\frac{1}{y}u^2=y^3$. 令 $u^2=V(y)$. 则 $2uu'_y=V'(y)$

$uu'_y=\frac{1}{2}V'_y \Rightarrow \frac{1}{2}V'_y-\frac{1}{y}V=y^3$，标准化：$V'_y-\frac{2}{y}V=2y^3$.

这为 $P(y)=-\frac{2}{y}$，$Q(y)=2y^3$ 的一阶线性ODE. 由公式得：

$V(y)=e^{-\int P(y)dy}(\int Q(y)e^{\int P(y)dy}dy+C_1)=e^{\int\frac{2}{y}dy}(\int 2y^3e^{-\int\frac{2}{y}dy}dy+C_1)$

$=y^2(\int 2y^3\frac{1}{y^2}dy+C_1)=y^2(y^2+C_1)$ 即 $u^2=y^2(y^2+C_1)$

利用 $y=1$ 时，$u=y'=1 \Rightarrow 1^2=1^2(1^2+C_1)\Rightarrow C_1=0 \Rightarrow u^2=y^4$.

$\Rightarrow u=\pm y^2$ 即 $y'=\pm y^2$，$y'=-y^2$ 不合题设(舍去)

解 $y'=y^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2}=dx \Rightarrow \int_1^y y^{-2}dy=\int_0^x dx=x$

$-y^{-1}\Big|_1^y=1-\frac{1}{y}=x \Rightarrow y=\frac{1}{1-x}$ 为所求特解。

解(2)：这是 Euler 方程，只要令 $x=e^t$ 或 $t=\ln x$，则

$y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow x y'_x = y'_t$，而 $y''_{xx} = (y'_t \frac{1}{x})'_x =$

$y''_{tt} t'_x \cdot \frac{1}{x} + y'_t \frac{-1}{x^2} = y''_{tt} (\frac{1}{x})^2 - y'_t \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 y''_{xx} = y''_{tt} - y'_t$.

原方程化为：$y''_{tt} - 3y'_t + 4y = (e^t)^4 = e^{4t}$，而

$y''_{tt} - 3y'_t + 4y = 0$ 有基解组 $y_1(t) = e^{-t}$，$y_2(t) = e^{4t}$，

$W(t) = \begin{vmatrix} e^{-t} & e^{4t} \\ -e^{-t} & 4e^{4t} \end{vmatrix} = 5e^{3t} \neq 0$，$f(t) = e^{4t} \Rightarrow$

$y^*(t) = \int_1^t \frac{y_1(s) y_2(t) - y_2(s) y_1(t)}{W(s)} f(s) ds = \int_1^t \frac{e^{-s} e^{4t} - e^{4s} e^{-t}}{5e^{3s}} e^{4s} ds$

$= \frac{1}{5} e^{4t} \int_1^t 1 ds - \frac{1}{5} e^{-t} \int_1^t e^{5s} ds = \frac{1}{5} t e^{4t} - \frac{6}{25} e^{4t} + \frac{e^5}{5} e^{-t}$

$y(t) = \bar{y}(t) + y^*(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{4t} + \frac{1}{5} t e^{4t} - \frac{6}{25} e^{4t} + \frac{e^5}{5} e^{-t} =$

$k_1 e^{-t} + k_2 e^{4t} + \frac{1}{5} t e^{4t}$ $(k_1 = c_1 + \frac{1}{5} e^5,\ k_2 = c_2 - \frac{6}{25})$

$y(x) \xlongequal{e^t = x} k_1 \frac{1}{x} + k_2 x^4 + \frac{1}{5} (\ln x) x^4$ 为所求通解．$(x>0)$

四) 作业：ex6.1/8；9；10．12/(2)； ex6.2/4；5．

第36讲：第6章复习小结与习题课