第34讲：二阶常微分方程的解法

$\Rightarrow F(x,y,y',y'')=0$

(一) 降阶法：

①、缺y型：$y''=f(x,y')$，只要设$y(x)=u$，则$y'(x)=u'\Rightarrow$

若$u'=f(x,u)$是"四类可积一阶ODE"(即变量可分离、齐次、线性、Bernoulli)中的一种，解得$u=g(x,C_1)=y'(x)=\frac{dy}{dx}$，

则$y=\int g(x,C_1)dx+C_2$为所求通解。

②缺x型：$y''=f(y,y')$，只要设$y'(x)=u$，则$y''(x)=\frac{dy'(x)}{dx}=$

$\frac{dy'(x)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dy}u\Rightarrow u\frac{du}{dy}=f(y,u)$是u关于y的一阶ODE.

若属于"四类可积一阶ODE"中的一种，解得$u=g(y,C_1)=y'=\frac{dy}{dx}$

再解$\int\frac{dy}{g(y,C_1)}=\int dx=x+C_2$即可。

(二) 线性二阶ODE解的结构：

$$y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=f(x)\neq0 \quad (\text{式}1),\ p,q,f\in C(I)$$

$$y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=0 \quad (\text{式}2),$$

称(式2)为二阶线性齐次方程，因(式2)左右两边均是一次的关于y及其各阶导数

(1)

称(非2)是二阶线性非齐次方程，因为(非2)的左边y的各阶导数都是一次的，而右边$f(x)$的零阶导数是0次的，两边不齐次。

Th1：设$y_1(x)$，$y_2(x)$都是(齐2)的解，C_1，C_2是任意常数，则$C_1y_1+C_2y_2$仍是(齐2)的解。特别地，$y_1(x)\pm y_2(x)$，$ky_1(x)$仍是(齐2)之解。

证：已知$\begin{cases} y_1''+py_1'+qy_1=0 \\ y_2''+py_2'+qy_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1y_1''+C_1py_1'+C_1qy_1=0 \\ C_2y_2''+C_2py_2'+C_2qy_2=0 \end{cases}$

相加得：$(C_1y_1+C_2y_2)''+p(C_1y_1+C_2y_2)'+q(C_1y_1+C_2y_2)=0$.

即$C_1y_1+C_2y_2$仍是(齐2)之解。

Th2：设$u(x)$是(齐2)之解，$z(x)$是(非2)之解，则$u(x)+z(x)$是(非2)之解.

证：已知$\begin{cases} u''+pu'+qu=0 \\ z''+pz'+qz=f \end{cases} \Rightarrow (u+z)''+p(u+z)'+q(u+z)=f$，

即$u+z$是(非2)之解.

Th3：设$z_1(x)$，$z_2(x)$都是(非2)之解，则$z_1(x)-z_2(x)$是(齐2)之解.

证：$\begin{cases} z_1''+pz_1'+qz_1=f \\ z_2''+p(z_2)'+qz_2=f \end{cases}$ 相减得：$(z_1-z_2)''+p(z_1-z_2)'+q(z_1-z_2)=0$

即 $z_1(x)-z_2(x)$ 是(齐)之解。

Th4：设 $y_1(x), y_2(x)$ 是(齐)在 I 上的线性无关的解，即 $\frac{y_2(x)}{y_1(x)} \neq$ 常数

$x \in I$，则对任意常数 C_1, C_2，$Y(x) \triangleq C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 是(齐)的通解。

并称 $y_1(x), y_2(x)$ 是(齐)的一个基本解组，简称基解组。

证：(1°) 首先，由 Th1 知 $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ 是(齐)的解，(2°) 其次，因 $\frac{y_2(x)}{y_1(x)} \neq$ 常数，$x \in I$，因此 C_1, C_2 是两个独立常数，故 $\bar{Y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ 是(齐)的通解——齐通解。(注：当 $\frac{y_2(x)}{y_1(x)}$ = 常数 λ，$\forall x \in I$ 时，

$\Rightarrow y_2(x) = \lambda y_1(x)$，$x \in I$，此时，$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 y_1(x) + C_2 \lambda y_1(x) =$

$(C_1 + \lambda C_2) y_1(x) = C y_1(x)$，$C = C_1 + \lambda C_2$，最后只有一个独立常数 C)

Th5：设 $y_1(x), y_2(x)$ 是(齐)的一个基解组，且 $y^*(x)$ 是(非)的一个特解，则(非)的通解为：

$$y(x) = \bar{Y}(x) + y^*(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y^*(x) \qquad (\text{非})$$

即有：非齐通解 $y(x)$ = 齐通解 $\bar{Y}(x)$ + 某个非齐特解 $y^*(x)$.(非)

(3).

(如1)表示的线性方程的解的结构，适用于一切线性方程，如线性代数方程(LAE)、线性偏微分方程(LPDE)、线性差分方程(LDE)、线性积分方程(LIE)及线性方程组。

证Th5：已知 $\bar{Y}(x)$，$y^*(x)$ 分别是(如2)，(如1)之解，依Th2 $\bar{Y}(x)+y^*(x)$ 仍是(如1)之解，且 $y_1(x), y_2(x)$ 线性无关，C_1, C_2 是两个独立之常数，故 $\bar{Y}(x)+y^*(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+y^*(x)$ 是(如1)的通解。

Th6：设 $y_1(x), y_2(x)$ 是(如2)的解，令 $W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$，$x\in I$.
则称 $W(x)$ 是解函数组 $y_1(x), y_2(x)$ 的朗斯基(Wronskian)行列式.

证明：$W'(x)=\frac{dW(x)}{dx}=-p(x)W(x)$，$\forall x\in I$. (如4)

证：∵ $W'(x)=(y_1y_2'-y_2y_1')'=(y_1y_2')'-(y_2y_1')'=y_1'y_2'-y_2'y_1'+y_1y_2''-y_2y_1''$

$=y_1(-py_2'-qy_2)-y_2(-py_1'-qy_1)=-p(y_1y_2'-y_2y_1')=-p(x)W(x)$,

∴ 成立 $\frac{dW(x)}{dx}=-p(x)W(x)$，$\forall x\in I$.

Th7：设 $y_1(x), y_2(x)$ 是(如2)之解，$x_0\in I$ 是I中任意取定的一点

则对 $\forall x\in I$，有：$W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}p(s)dx}$，$\forall x\in I$.　(式5)

(1) 若 $\exists x_0\in I$，使 $W(x_0)=0$ 时，有 $W(x)\equiv 0\cdot e^{-\int_{x_0}^{x}p(s)ds}\equiv 0$，$\forall x\in I$.

(2) 若 $\exists x_0\in I$，使 $W(x_0)>0(<0)$ 时，使有 $W(x)>0\ (<0)$ 恒成立，$\forall x\in I$.

即由(线性)齐次函数组构成的 $W(x)$ 在 I 上的取值只有两种状态：一种是恒为零，这种状态恰好对应函数组 $y_1(x),y_2(x)$ 在区间 I 上是线性相关的；另一种状态是 $W(x)$ 在 I 上恒不为零，这种状态恰好对应函数组 $y_1(x),y_2(x)$ 在 I 上是线性无关的。

证明：由(式4)可知，$W'(x)=-p(x)W(x)$，$\forall x\in I$ $\iff$

$W'(x)+p(x)W(x)\equiv 0$，两边同乘以 $e^{\int_{x_0}^{x}p(s)ds}$：

$$W'(x)e^{\int_{x_0}^{x}p(s)ds}+p(x)W(x)e^{\int_{x_0}^{x}p(s)ds}\equiv 0\iff\left(W(x)e^{\int_{x_0}^{x}p(s)ds}\right)'_x\equiv 0\Rightarrow$$

$W(x)e^{\int_{x_0}^{x}p(s)ds}\equiv C$，$\forall x\in I$. 取 $x_0\in I$，则 $e^{\int_{x_0}^{x_0}p(s)ds}=e^0=1$

$$\Rightarrow W(x_0)e^0=C\Rightarrow C=W(x_0)\Rightarrow W(x)e^{\int_{x_0}^{x}p(s)ds}=W(x_0)\iff$$

$W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}p(s)ds}$；$\forall x\in I$.

Th8：(刘维尔(Liouville)公式：

设 $y_1(x)$ 是(方2)的一个非零解，即 $y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1=0$，且 $y_1(x)\neq 0, x\in I$.

则(方2)的另一个与 $y_1(x)$ 线性无关的解为：

$$y_2(x)=y_1(x)\int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(x)dx}dx \qquad (公6)、$$

证：∵ $y_1(x), y_2(x)$ 是(方2)在 I 上线性无关解，∴ $W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2\\ y_1' & y_2'\end{vmatrix}\neq 0, \forall x\in I$.

而 $\left(\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)}\right)'=\dfrac{y_2'y_1-y_1'y_2}{y_1^2(x)}=\dfrac{W(x)}{y_1^2(x)}=\dfrac{W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}p(s)ds}}{y_1^2(x)}, \forall x\in I \xRightarrow{W(x_0)\neq 0}$

$\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)}=W(x_0)\displaystyle\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p(x)dx}dx \Rightarrow y_2(x)=W(x_0)y_1(x)\displaystyle\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p(x)dx}dx$

反之，易知，$y_2(x)=y_1(x)\displaystyle\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p(x)dx}dx$ 仍是(方2)之解，且 $y_2(x)$ 与 $y_1(x)$

在 I 上线性无关。

(三) 例题：求解下列ODE，求通解或特解.

(1). $y''=\dfrac{2x}{1+x^2}y'$； (2). $\begin{cases} yy''-(y')^2=y^4\\ y(0)=1,\ y'(0)=1\end{cases}$

(3). 已知 $(1+x^2)y''+2xy'=6x^2+2$ 的一个特解为 $y=x^2$，求此方程的通解.

解(1)：该方程可降阶，令 $y'=u$，则原方程化为 $u'=\dfrac{2x}{1+x^2}u$

(ii) $u\neq 0$ 时，则 $\int \frac{du}{u}=\int\frac{2x}{1+x^2}dx \Rightarrow \ln u=\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=\ln(1+x^2)+\ln C_1$

$\Rightarrow u=C_1(1+x^2)$ 即 $y'=C_1(1+x^2) \Rightarrow y=\int y'dx=\int C_1(1+x^2)dx=C_1(x+\frac{x^3}{3})+$ C_2，即(1)的通解为 $y(x)=C_1(x+\frac{x^3}{3})+C_2$.

方法(2)：$y''-\frac{2x}{1+x^2}y'=0$ 是二阶线性齐次方程，$p(x)=-\frac{2x}{1+x^2}$，$q(x)=0$，

显然 $y_1(x)\equiv 1$ 是方程的一个非零解。由 Liouville 公式，

该方程的与 $y_1(x)$ 线性无关的另一个解为：

$$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p(x)dx}dx=1\int\frac{e^{+\int\frac{2x}{1+x^2}dx}}{1^2}dx=\int e^{+\ln(1+x^2)}dx$$

$=\int(1+x^2)dx=x+\frac{x^3}{3}$. 故 原方程的通解为：

$$y(x)=C_1y_2(x)+C_2y_1(x)=C_1(x+\frac{x^3}{3})+C_2\cdot 1$$

解(2)：属于可降阶方程，缺 x，令 $y'(x)=u$，则 $y''(x)=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dy}\frac{dy}{dx}$

$=u\frac{du}{dy} \Rightarrow$ 原方程化为：$yu\frac{du}{dy}-u^2=y^4$，同除以 $y\cdot u \Rightarrow$

$\frac{du}{dy}-\frac{1}{y}u=y^3u^{-1}$，是 $n=-1$ 的 Bernoulli 方程，故也同除以 u^{-1}：

$u^{+1}\frac{du}{dy}-\frac{1}{y}u^2=y^3$，令 $u^2=z(y)$ 则 $2uu'_y=z'(y) \Rightarrow uu'_y=\frac{z'(y)}{2}$

$\frac{1}{2}z'(y)-\frac{1}{y}z(y)=y^3 \Rightarrow$ 一阶线性ODE：$z'(y)-\frac{2}{y}z(y)=2y^3$ (I)

$\Rightarrow z(y)=e^{-\int P(y)dy}\left(\int Q(y)e^{\int P(y)dy}dy+C_1\right)=e^{\int\frac{2}{y}dy}\left(\int 2y^3e^{-\int\frac{2}{y}dy}dy+C_1\right)$

$=y^2\left(\int 2y^3\cdot\frac{1}{y^2}dy+C_1\right)=y^2(y^2+C_1)$ 即 $u^2=y^2(y^2+C_1)$

由初始条件知，$y=1$ 时，$u=y'=1$，即 $1^2=1^2(1^2+C_1)\Rightarrow C_1=0$.

$\therefore u^2=y^4$，$\Rightarrow u=\pm y^2$ 即 $y'=\pm y^2$，只有 $y'=+y^2$ 合

题意. $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=y^2\Rightarrow\int_1^y\frac{dy}{y^2}=\int_0^x dx\Rightarrow\left.\frac{y^{-1}}{-1}\right|_1^y=x\Rightarrow$

$y^{-1}-1=-x\Rightarrow y(x)=\frac{1}{1-x}$ 为所求特解。

解(3). 已知 $y^*(x)=x^2$，只需求出齐次线性方程：

$(1+x^2)y''+2xy'=0$ 的基解组 $y_1(x), y_2(x)$ 即可. 这里 $p(x)=\frac{2x}{1+x^2}$，

$q(x)=0$ 显然 $y_1(x)=1$ 是齐次方程的一个非零解，由 Liouville

公式：$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2(x)}dx=1\int\frac{e^{-\int\frac{2x}{1+x^2}dx}}{1^2}dx=\int\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x$

是齐次方程与 $y_1(x)$ 线性无关的另一个解. $\therefore \bar{y}(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$

$=C_1\cdot 1+C_2\arctan x$. 而原方程的通解为

$y(x)=\bar{y}(x)+y^*(x)=C_1+C_2\arctan x+x^2$.

(四) 设 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 是

$y^{(3)}+p(x)y^{(2)}+q(x)y^{(1)}+r(x)y=0$, $p,q,r\in C(I)$, (式7)

之的解函数, $W(x)\triangleq\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$, $x\in I$, 则

(1) $W'(x)=-p(x)W(x)$, $\forall x\in I$, (2) $W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}p(s)ds}$, $\forall x\in I$,

(3). $W(x)\equiv 0$, $\forall x\in I \Longleftrightarrow y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 在 I 上线性相关.

(4) $W(x)\neq 0$, $\forall x\in I \Longleftrightarrow y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 在 I 上线性无关, 此时,

(式7) 有通解 $Y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+C_3y_3(x)$, $x\in I$, (式8)

且 $y^{(3)}+p(x)y^{(2)}+q(x)y^{(1)}+r(x)y=f(x)\not\equiv 0$ 有通解: (设 $y^*(x)$ 是其特解)

$y(x)=Y(x)+y^*(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+C_3y_3(x)+y^*(x)$ (式9)

且上述二阶、三阶线性ODE的解的结构与结论可平行地推广到 n 阶 LODE 中去。($\forall n\in N^*$).

(五) 作业: ex6.12/1; 2; 3; ex6.11/12(3),(4); 13(2).

~~第35讲: 二阶线性常系数常微分方程的一般解法~~