第33讲：五类可积的一阶常微分方程的解法

(一) 常微分方程 (ordinary differential equation)：

含自变量 x、未知函数 $y(x)$ 及其导数的方程：$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \cdots, y^{(n)}(x))=0$

称为常微分方程，记作 ODE，当方程中的最高阶导数为 n 阶时，称此方程为 n 阶 ODE。即称 $F(x, y(x), y'(x))=0$

为一阶微分方程 (first order differential equation)

例1. 求微分方程：$y'=1+x^2$ 在初始条件 $y|_{x=0}=y(0)=3$

(注：ODE 经有限次积分，即可求出其解的方程，称之为"可积微分方程")

下的解。

解法(一)：从 $\frac{dy}{dx}=1+x^2 \Rightarrow dy=(1+x^2)dx \Rightarrow \int dy=\int(1+x^2)dx$

$\Rightarrow y(x)=x+\frac{1}{3}x^3+C$，为所求的通解，利用条件：$3=y(0)=$

$0+\frac{1}{3}\cdot 0^3+C \Rightarrow C=3$，故 $\begin{cases} y'=1+x^2 \\ y(0)=3 \end{cases}$ 的特解为 $y=x+\frac{x^3}{3}+3$.

方法(二)：$dy=(1+x^2)dx$ 两边取定积分：$\int_3^y dy=\int_0^x(1+x^2)dx \Rightarrow y-3=x+\frac{x^3}{3} \Rightarrow y=x+\frac{x^3}{3}+3$.

(二) 可分离变量的 ODE：

设 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)=g(x)\cdot h(y)$，其中 $g, h\in C$ (*)

则称(*)为可分离变量的 ODE. (1).

(1) 设方程 $h(y)=0$ 有实根: $y=y_1, y=y_2, \cdots, y=y_m$, 则

$y=y_1, y=y_2, \cdots, y=y_m$ 都是(*)的特解.

(2) 当 $y\neq y_m, m=1,2,3,\cdots m$ 时, $h(y)\neq 0$, 从(*) $\Rightarrow \frac{dy}{h(y)}=g(x)dx$

两边积分 $\int\frac{dy}{h(y)}=\int g(x)dx$ 即得所求通解。

因此, ODE的通解未必是ODE的全部解!

例2. 求ODE: $y'-e^{x-y}+e^x=0$ 的通解:

解: $\because y'=\frac{dy}{dx}=e^{x-y}-e^x=e^x(e^{-y}-1)$ 是可分离变量的ODE.

(1) 从 $e^{-y}-1=0 \Rightarrow$ 有根 $y=0 \Rightarrow y=0$ 是原ODE的一个特解.

(2) 当 $e^{-y}-1\neq 0$ 时, $\Rightarrow \int\frac{dy}{e^{-y}-1}=\int e^x dx \Rightarrow \int\frac{e^y dy}{1-e^y}=e^x+C_1 \Rightarrow$

$-\int\frac{d(e^y-1)}{e^y-1}=e^x+C_1 \Rightarrow \ln|e^y-1|=-e^x-C_1 \Rightarrow$

$|e^y-1|=e^{-(e^x+C_1)} \Rightarrow e^y-1=\pm e^{-C_1}e^{-e^x} \xlongequal{\pm e^{-C_1}=C} Ce^{-e^x}$

$\Rightarrow y(x)=\ln(1+Ce^{-e^x})$

(三) 齐次方程: $\frac{dy}{dx}=g(\frac{y}{x}), g\in C$. (续)

只要令 $\frac{y}{x}=u(x)$，则 $y=x\,u(x)$，$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=u(x)+x\frac{du}{dx}=g(u)$

$\Rightarrow \frac{du}{dx}=(g(u)-u)\frac{1}{x}$，$(x\neq 0)$ 是可分离变量ODE.

只要求解：$\int\frac{du}{g(u)-u}=\int\frac{dx}{x}=\ln x+C$，最后再回代：$u=\frac{y}{x}$.

例3，求解下列齐次方程：

(1)，$y'=\frac{x+y}{x-y}$，(2)．$\frac{dx}{x^2-xy+y^2}=\frac{dy}{2y^2-xy}$

解(1) ∵ $y'=\frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}=g(\frac{y}{x})$，$g(u)=\frac{1+u}{1-u}\in C$，$(u\neq 1)$

∴(1)是齐次ODE，令 $\frac{y}{x}=u$ 则 $y=xu$，$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}=\frac{1+u}{1-u}$

即 $\frac{du}{dx}=\left(\frac{1+u}{1-u}-u\right)\frac{1}{x}=\frac{1+u^2}{1-u}\frac{1}{x}\Leftrightarrow\int\frac{1-u}{1+u^2}du=\int\frac{dx}{x}=\ln x+\ln C_1$

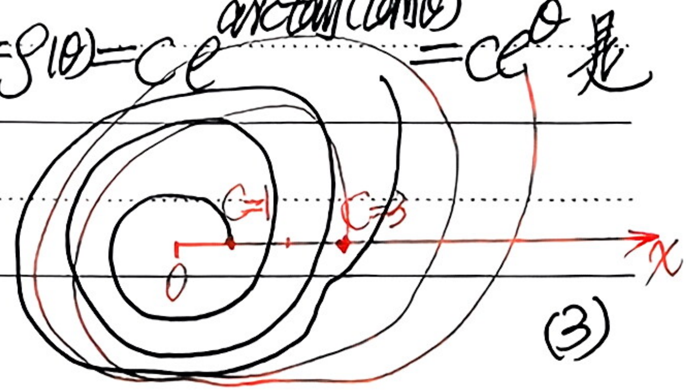
$\Rightarrow\int\frac{du}{1+u^2}-\frac{1}{2}\int\frac{d(1+u^2)}{1+u^2}=\ln(xC_1)\Rightarrow\arctan u-\ln\sqrt{1+u^2}=\ln(xC_1)$

回代：$\arctan\frac{y}{x}=\ln\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}\,xC_1=\ln\sqrt{x^2+y^2}\,C_1$

$\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}\,C_1=e^{\arctan\frac{y}{x}}\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{\arctan\frac{y}{x}}$，$(C=\frac{1}{C_1})$

令 $\begin{cases}x(\theta)=\rho(\theta)\cos\theta\\ y(\theta)=\rho(\theta)\sin\theta\end{cases}$ 则 $\sqrt{x^2+y^2}=\rho(\theta)=Ce^{\arctan(\tan\theta)}=Ce^{\theta}$ 是

一族螺线：



解(2). ∵ $\frac{dy}{dx}=\frac{2y^2-xy}{x^2-xy+y^2}=\frac{2(\frac{y}{x})^2-\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}+(\frac{y}{x})^2}=g(\frac{y}{x})$, $g\in C$.

∴可设 $\frac{y}{x}=u$，则 $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}=g(u)=\frac{2u^2-u}{1-u+u^2}\Rightarrow$

$x\frac{du}{dx}=\frac{2u^2-u}{1-u+u^2}-u=\frac{-u(u-1)(u-2)}{u^2-u+1}$，$u=0, u=1, u=2$ 是方程

的三个特解，即 $\frac{y}{x}=0, \frac{y}{x}=1, \frac{y}{x}=2\Rightarrow y=0, y=x, y=2x$ 是

对方程的三个特解。当 $u\neq 0,1,2$ 时，有

$\int\frac{u^2-u+1}{u(u-1)(u-2)}du=-\int\frac{dx}{x}=-\ln x+\ln C$，用部分分式法可知

$\int\frac{u^2-u+1}{u(u-1)(u-2)}du=\int(\frac{\frac{1}{2}}{u}+\frac{-1}{u-1}+\frac{\frac{3}{2}}{u-2})du=-\ln x+\ln C\Rightarrow$

$\frac{1}{2}\ln u-\ln(u-1)+\frac{3}{2}\ln(u-2)=\ln\frac{C}{x}\Rightarrow\frac{(u-2)^{\frac{3}{2}}}{(u-1)\sqrt{u}}=\frac{C}{x}$，

最后回代 $u=\frac{y}{x}$：$\frac{(\frac{y}{x}-2)^{\frac{3}{2}}}{(\frac{y}{x}-1)\sqrt{\frac{y}{x}}}=\frac{C}{x}\Rightarrow\frac{(y-2x)^{\frac{3}{2}}}{(y-x)\sqrt{y}}=\frac{C}{x}$，

(四). 一阶线性微分方程 (first order linear ODE)

$y'+p(x)y=Q(x)$，$p(x), Q(x)\in C(I)$.　　(*3)

解法(一)：方程两边同乘以 $e^{\int p(x)dx}$：

$(ye^{\int p(x)dx})'=y'e^{\int p(x)dx}+p(x)ye^{\int p(x)dx}=Q(x)e^{\int p(x)dx}$

$\because \int (ye^{\int p(x)dx})' dx = \int Q(x) e^{\int p(x)dx} dx \Leftrightarrow$

$ye^{\int p(x)dx} + C_1 = \int Q(x) e^{\int p(x)dx} dx \Rightarrow$ (*3) 的通解公式为：

$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \left(\int Q(x) e^{\int p(x)dx} dx + C \right)$, $(C = -C_1)$. (*4).

例4、求解下列二阶线性ODE：$y'' = \frac{1}{x} y' + x$. $(x \neq 0)$

解 设 $y'(x) = u(x)$. 则 $y'' = u' \Rightarrow u' - \frac{1}{x} u = x$，这是 $\begin{cases} p(x) = -\frac{1}{x} \\ Q(x) = x \end{cases}$

一阶线性ODE，代入求解公式 (*4)：

$u(x) = e^{-\int -\frac{1}{x} dx} \left(\int x e^{\int -\frac{1}{x} dx} dx + C_1 \right) = e^{\ln x} \left(\int x e^{-\ln x} dx + C_1 \right)$

$= x \left(\int x \cdot \frac{1}{x} dx + C_1 \right) = x(x + C_1) = x^2 + xC_1$ 即

$y'(x) = x^2 + xC_1 \Rightarrow y(x) = \int (x^2 + xC_1) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} C_1 + C_2$ 为所求通解。

例5、求解：$y' = \frac{y}{x + y^3}$

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + y^3} \Leftrightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x + y^3}{y} \Rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{1}{y} x = y^2$ 是 $\begin{cases} p(y) = -\frac{1}{y} \\ Q(y) = y^2 \end{cases}$

一阶线性ODE，公式为：$x(y) = e^{-\int p(y)dy} \left(\int Q(y) e^{\int p(y)dy} dy + C \right)$

$= e^{\int \frac{1}{y} dy} \left(\int y^2 e^{-\int \frac{1}{y} dy} dy + C \right) = e^{\ln y} \left(\int y^2 e^{-\ln y} dy + C \right) = y\left(\frac{y^2}{2} + C \right)$ 为

所求通解。

例5. 求 $$\begin{cases} y'+p(x)y=Q(x), & p(x),Q(x)\in C(I), \\ y(x_0)=y_0 & x_0,x\in I,\ y_0\text{为常数} \end{cases} \qquad (*_5)$$

的特解:

解: 方程两边同乘以 $e^{\int_{x_0}^{x}p(s)ds}$:

$$\left(ye^{\int_{x_0}^{x}p(s)ds}\right)'=y'e^{\int_{x_0}^{x}p(s)ds}+p(x)ye^{\int_{x_0}^{x}p(s)ds}=Q(x)e^{\int_{x_0}^{x}p(s)ds}\Rightarrow$$

$$\int_{x_0}^{x}\left(ye^{\int_{x_0}^{x}p(s)ds}\right)'dx=\int_{x_0}^{x}Q(x)e^{\int_{x_0}^{x}p(s)ds}dx\Rightarrow$$

$$y(x)e^{\int_{x_0}^{x}p(s)ds}\Big|_{x_0}^{x}=\int_{x_0}^{x}Q(x)e^{\int_{x_0}^{x}p(s)ds}dx\Rightarrow$$

$$y(x)e^{\int_{x_0}^{x}p(s)ds}-y(x_0)e^{\int_{x_0}^{x_0}p(s)ds}=\int_{x_0}^{x}Q(x)e^{\int_{x_0}^{x}p(s)ds}dx\Rightarrow \qquad y_0\cdot 1=y_0$$

$$y(x)=e^{-\int_{x_0}^{x}p(s)ds}\left(\int_{x_0}^{x}Q(x)e^{\int_{x_0}^{x}p(s)ds}dx+y_0\right) \qquad (*_6)$$

$(*_6)$是求一阶线性ODE初值问题的解公式。

(五) 伯努利(Bernoulli)方程的通解.

$$y'+p(x)y=Q(x)y^{n} \quad (n\in R,\ n\neq 0,1),\ p,Q\in C(I) \qquad (*_7)$$

同除以 y^n: $y^{-n}y'+p(x)y^{1-n}=Q(x)$. 令 $y^{1-n}=u(x)$, 则

$(1-n)y^{-n}y'=u'(x)\Rightarrow y^{-n}y'=\frac{u'(x)}{1-n}\Rightarrow(*_7)$化为

$(*_6)$.

$\frac{u'(x)}{1-n}+p(x)u(x)=Q(x) \Leftrightarrow u'(x)+(1-n)p(x)u(x)=(1-n)Q(x)$

依(公式)得：$u(x)=e^{-\int(1-n)p(x)dx}\left(\int(1-n)Q(x)e^{\int(1-n)p(x)dx}dx+C\right)$

即 $y^{1-n}=e^{(n-1)\int p(x)dx}\left(\int(1-n)Q(x)e^{(1-n)\int p(x)dx}dx+C\right)$

为所求的通解.(隐式通解).

例6. 求 $y'=y\tan x+y^2\cos x$ 的通解.

解：原方程为 $n=2$ 的 Bernoulli 方程. 方程两边同时除以 y^2

$y^{-2}y'-(\tan x)y^{-1}=\cos x$，令 $y^{-1}=u(x) \Longrightarrow (-1)y^{-2}y'=u'(x)$

$\Rightarrow y^{-2}y'=-u'(x) \Rightarrow$ 原方程化为：$u'(x)+(\tan x)u(x)=-\cos x$

这是 $p(x)=\tan x$, $Q(x)=-\cos x$ 的一阶线性ODE. 由(公式).

$u(x)=e^{-\int p(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)=e^{-\int\tan x dx}\left(\int(-\cos x)e^{\int\tan x dx}dx+C\right)$

$=e^{+\ln\cos x}\left(\int(-\cos x)e^{-\ln\cos x}dx+C\right)=\cos x\left(\int(-\cos x)\frac{1}{\cos x}dx+C\right)$

$=\cos x(-x+C)$ 即 $y^{-1}=u(x)=-x\cos x+C\cos x$ 即

$y=\frac{1}{-x\cos x+C\cos x}$ 为所求通解。

(书)作业：ex6.1：1/(1),(4)；2/(2),(4)；4/(1),(4)；5/(1),(2).

第五类可积的一阶方程——黎卡提(Riccati)方程.

$$y' = p(x)y^2 + Q(x)y + R(x),\quad p, Q, R \text{ 已知且 } C,\ p(x) \neq 0. \qquad (*_1)$$

且已知这类方程的一个特解：$y = g(x)$：$g'(x) = p(x)g^2(x) + Q(x)g(x) + R(x)$

只要作代换：$y = u(x) + g(x)$，则可将$(*_1)$化为 Bernoulli 方程，进而求出$(*_1)$的通解。将 $y = u(x)+g(x)$ 代入$(*_1)$，得：

$$u'(x) + g'(x) = p(x)(u(x)+g(x))^2 + Q(x)(u(x)+g(x)) + R(x) \Leftrightarrow$$

$$u'(x) + \cancel{g'(x)} = p(x)u^2(x) + [Q(x) + 2p(x)g(x)]u(x) + [\cancel{p(x)g^2(x) + Q(x)g(x) + R(x)}]$$

$$\Leftrightarrow u'(x) - [Q(x) + 2p(x)g(x)]u(x) = p(x)u^2(x) \qquad (*_2)$$

$(*_2)$即为 $n=2$ 的 Bernoulli 方程，两边同除以 $u^2(x)$：

$u'(x)u^{-2}(x) - [Q(x) + 2p(x)g(x)]u^{-1}(x) = p(x)$，令 $u^{-1}(x) = V(x)$，则

$-u^{-2}(x)u'(x) = V'(x) \Rightarrow u'(x)u^{-2}(x) = -V'(x) \Rightarrow$ $(*_2)$化为一阶线性方程：

$$V'(x) + [Q(x) + 2p(x)g(x)]V(x) = -p(x) \Rightarrow$$

$$V(x) = e^{-\int [Q(x)+2p(x)g(x)]dx}\left(\int (-p(x)) e^{\int (Q(x)+2p(x)g(x))dx} + C\right) = \frac{1}{u(x)} = \frac{1}{y - g(x)}$$

$$\Rightarrow y(x) = g(x) + \frac{e^{\int [Q(x)+2p(x)g(x)]dx}}{C - \int p(x) e^{\int [Q(x)+2p(x)g(x)]dx} dx} \qquad (*_3).$$

为所求的Riccati方程的通解。 (8).

例. 求下列Riccati方程的通解:

(1). $y'=y^2-\frac{2}{x^2}$;　　(2). $xy'+y-e^{x}y^2=xe^{x}$

解(1): 这是 $P(x)\equiv 1, Q(x)\equiv 0, R(x)=-\frac{2}{x^2}$ 的Riccati方程. 且由观察法可知, $y=\varphi(x)=\frac{1}{x}$ 是(1)的一个特解. 代入(*3), 即得(1)的通解为:

$$y(x)=\varphi(x)+\frac{e^{\int[Q(x)+2P(x)\varphi(x)]dx}}{C-\int P(x)e^{\int[Q(x)+2P(x)\varphi(x)]dx}dx}=\frac{1}{x}+\frac{e^{\int\frac{2}{x}dx}}{C-\int e^{\int\frac{2}{x}dx}dx}$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{x^2}{C-\int x^2dx}=\frac{1}{x}+\frac{x^2}{C-\frac{1}{3}x^3}$$

解(2): 由观察法知, $y=\varphi(x)=e^x$ 是(2)的一个特解. 且(2)的 P,Q,R 分别为: $P(x)=\frac{e^x}{x}$, $Q(x)=-\frac{1}{x}$, $R(x)=e^x$: $y'=\frac{e^x}{x}y^2-\frac{1}{x}y+e^x$, 代入(*3):

(2)的通解为:

$$y(x)=e^x+\frac{e^{\int[-\frac{1}{x}+2\frac{e^x}{x}e^x]dx}}{C-\int\frac{e^x}{x}e^{\int[-\frac{1}{x}+2\frac{1}{x}e^xe^x]dx}dx}=e^x+\frac{x}{C+e^{-x}}$$

(3) 请同学们自己解下列Riccati方程:

(1). $y'=xy^2-\frac{3}{x^3}$;　　(2). $\begin{cases} y'=x^2+y^2 \\ y(0)=0. \end{cases}$