第32讲：定积分应用举例

(一)计算数列极限：

(1). 若 $f\in C[a,b]$，则 $f\in R[a,b]$，且 $\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 两个任意

$\xrightarrow[\xi_i 取 x_i=a+\frac{b-a}{n}i]{可n等分[a,b]}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(a+\frac{b-a}{n}i)\frac{b-a}{n}\xrightarrow[b=1时]{当a=0,}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n})\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)dx$

(2). 求下列数列极限：($p>0$，常数)

(1°) $\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$；(2°) $\lim_{n\to\infty}\ln\left[\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}\right]$，(3°) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$

解(1°). 方法(一)：Stolz公式法； 方法(二)：定积分法：

$原式=\lim_{n\to\infty}\left((\frac{1}{n})^p+(\frac{2}{n})^p+\cdots+(\frac{i}{n})^p+\cdots+(\frac{n}{n})^p\right)\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^p\frac{1}{n}$

$=\int_0^1x^pdx=\frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_0^1=\frac{1}{p+1}$，$\forall p>0$.

注(1)：今后要重点学的定积分 $\int_0^1x^pdx$ 在 $0<p<+\infty$ 中已确定了一个函数 $\frac{1}{p+1}$。

解(2°). $原式=\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+i)\cdots(n+n)}{n\cdot n\cdots n\cdots n}}=\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{i}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\frac{i}{n})\right)\frac{1}{n}=\int_0^1\ln(1+x)dx=x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1x\frac{1}{1+x}dx$

$=\ln2-\int_0^1\frac{1\cdot(x+1)-1}{1+x}dx=\ln2-\int_0^1 1dx+\int_0^1\frac{d(1+x)}{1+x}=\ln2-1+\ln2=2\ln2-1$.

解(3°): 方法(一), 利用: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+\eta+\alpha(n)$, $\begin{cases}\eta\approx 0.5772,\\ \alpha(n)\to 0,(n\to\infty)\end{cases}$

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[(\ln 2n+\eta+\alpha_1(n))-(\ln n+\eta+\alpha_2(n))\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\ln\frac{2n}{n}+\alpha_1(n)-\alpha_2(n)\right]=\ln 2+0-0=\ln 2.$$

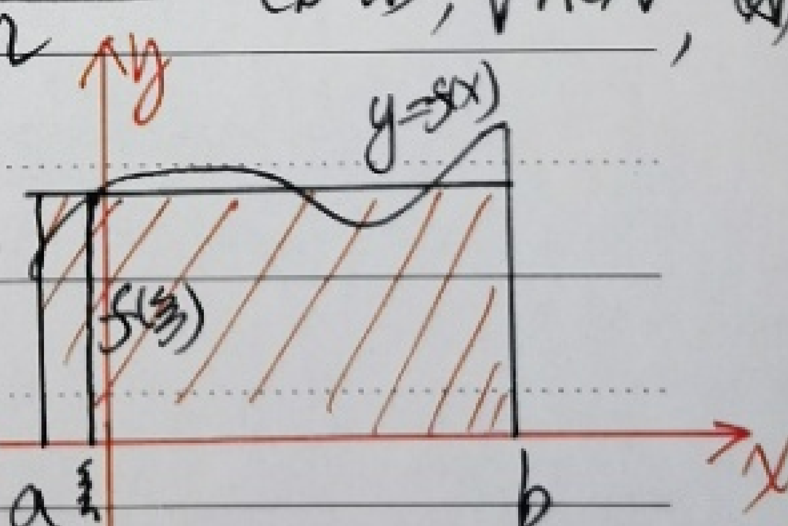
方法(二): 积分法:

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n(1+\frac{1}{n})}+\frac{1}{n(1+\frac{2}{n})}+\cdots+\frac{1}{n(1+\frac{i}{n})}+\cdots+\frac{1}{n(1+\frac{n}{n})}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\int_0^1\frac{d(1+x)}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2.$$

(二) 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的计算机计算方法: $(x_i=a+\frac{b-a}{n}i,\ i=1,2,\cdots,n)$

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\frac{b-a}{n}\approx\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}(b-a),\ \forall n\in N^*,\quad (*_1)$$



n 愈大时, 计算的精确度愈高

(三) 积分中值定理与积分平均值 f

设 $f(x)\in C[a,b]$, 则必有 $\xi\in(a,b)$, 使 $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$ $(*_2)$

设 $f(x)\geq 0$, 则 $(*_2)$ 左边是曲边梯形面积, 右边是矩形面积, 它们具有公共的底: $[a,b]$.

其中，$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ 称为 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的积分平均值。凡在 $[a,b]$ 上连续的函数 $f(x)$，在 $[a,b]$ 上取值的平均值都这样求。$\bar{f}=f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

(1) 设某地11.29的气温变化规律为 $f(t)=\frac{10}{3t+1}$，$t\in[0,24]$

则此地这天的平均气温为 $\bar{f}=\frac{1}{24-0}\int_0^{24}\frac{10}{3t+1}dt$

$$=\frac{10}{24\times3}\int_0^{24}\frac{d(3t+1)}{3t+1}=\frac{5}{36}\ln(3t+1)\Big|_0^{24}=\frac{5}{36}\ln73\approx0.5959\text{（度）}$$

(2) 用计算机求 $\bar{f}$ 的公式为：

$$\bar{f}=f(\xi)=\frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}(b-a)\approx\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n},\ \forall n\in N^*$$

其中 x_i 为第 i 个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 的右端点：$x_i=a+\frac{b-a}{n}i$，$i=1,2,\cdots n$.

(三) 定积分与 n 阶 Taylor 公式：(设 $f\in C^{n+1}(U(a,\delta))$)

$$\boxed{\begin{aligned}&从\ f(x)-f(a)=\int_x^a df(t)=\int_x^a f'(t)dt=\int_x^a f'(t)d(t-a)=\\&(t-a)f'(t)\Big|_x^a-\int_a^x f''(t)(t-a)dt\end{aligned}}$$

从 $f(x)-f(a)=\int_a^x df(t)=\int_a^x f'(t)dt=\int_a^x f'(t)d(t-x)$

$$=(t-x)f'(t)\Big|_a^x-\int_a^x f''(t)(t-x)dt=(x-a)f'(a)-\frac{1}{2!}\int_a^x f''(t)d(t-x)^2$$

③

$=(x-a)f'(a)-\frac{f''(t)}{2!}(t-x)^2\Big|_a^x+\frac{1}{2!}\int_a^x f^{(3)}(t)(t-x)^2dt$

$=(x-a)f'(a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+\frac{1}{3!}\int_a^x f^{(3)}(t)d(t-x)^3$

$=(x-a)f'(a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+\frac{1}{3!}(t-x)^3f^{(3)}(t)\Big|_a^x-\frac{1}{3!}\int_a^x f^{(4)}(t)(t-x)^3dt$

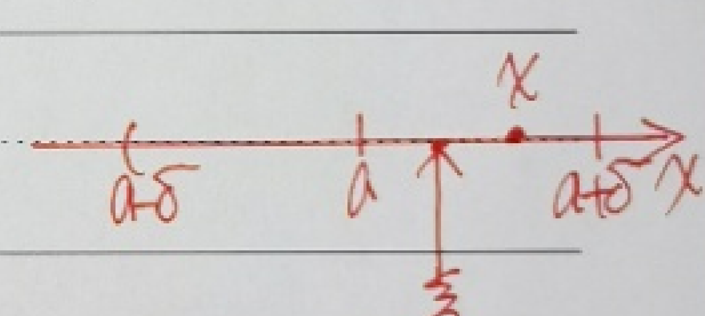
$=f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+\frac{1}{3!}(x-a)^3f^{(3)}(a)+\int_a^x\frac{1}{3!}f^{(4)}(t)(x-t)^3dt=\cdots$

$=\sum_{m=1}^{n}\frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m+\int_a^x\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(t)(x-t)^ndt\Longleftrightarrow$

$f(x)=\sum_{m=0}^{n}\frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m+R_n(a)$， (※3)

其中，$R_n(a)=\int_a^x\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(t)(x-t)^ndt\triangleq R_n(a)$ (※4)

称为n阶Taylor公式的积分型余项。



∵$f^{(n+1)}(t)$在$[a,x]$或~~[x,a]~~上C且$(x-t)^n$在$[a,x]$上非负，不变号，

且C，由推广的积分中值定理知，∃$\xi\in[a,x]$，使

$R_n(a)=\int_a^x\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(t)(x-t)^ndt=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_a^x(x-t)^ndt=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

这正是n阶Taylor公式的Lagrange型余项，又$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}=$

$o((x-a)^n)$ 即 $R_n(a)=o((x-a)^n)$，这即Peano型余项。

利用 $R_n(x)=0$ 及拉格朗日中值定理：

$$\frac{R(a)}{x-a}=\frac{R(a)-R(x)}{-(a-x)}=-\frac{R(a)-R(x)}{a-x}=-R'(\xi)=+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n$$

$$\Rightarrow R(a)=(x-a)\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n}{n!}=\frac{(x-a)(x-\xi)^n}{n!}f^{(n+1)}(\xi),\ \xi\in[a,x].\quad (※)$$

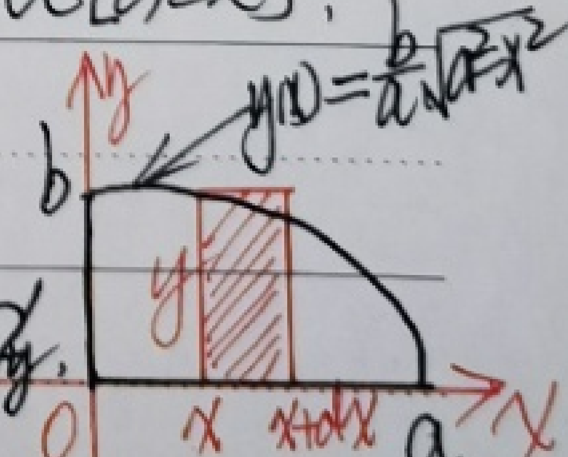
(※)称为n阶Taylor公式的Cauchy型余项。

(四) 定积分的几何应用：

(1) 求椭圆域 D: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$ 绕oy轴旋转一周的旋转体Ω体积 $V(\Omega)$.

(2) 求椭圆 L: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的弧长 $S(L)$ 的近似值.（$a>b>0$）

(3) 求心脏线绕极轴旋转一周的旋转体Ω的侧面积 $S_{侧}$.（心脏线：$\rho(\theta)=a(1+\cos\theta)$, $a>0$, $\theta\in[0,2\pi]$.



解(1). $\Delta V=-\pi x^2 y(x)+\pi(x+dx)^2 y(x)$

$=2\pi x y(x)dx+\pi y(x)(dx)^2 \approx 2\pi x y(x)dx \triangleq dV_y$. $x\in[0,a]$

$$\Rightarrow V_y=2\int_0^a dV_y=2\int_0^a(2\pi x y(x)dx)=4\pi\int_0^a x\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$$

$$=\frac{4\pi b}{a}\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^a (a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}d(a^2-x^2)=\frac{4}{3}\pi a^2 b.$$

而 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$ 绕 ox 轴旋转一周的旋转体体积为 $\frac{4}{3}\pi b^2 a$.

解(2)：设 $L:\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases}$，$a^2-b^2=c^2$，$\frac{c}{a}=e$ (离心率).

则 $dL=\sqrt{x'^2_\theta+y'^2_\theta}\,d\theta=\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\,d\theta=\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\cos^2\theta}\,d\theta$

$=a\sqrt{1-(e\cos\theta)^2}\,d\theta$ $(e=\frac{c}{a}<1)\Rightarrow S(L)=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\sqrt{1-(e\cos\theta)^2}\,d\theta$

由 $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$ (如6)

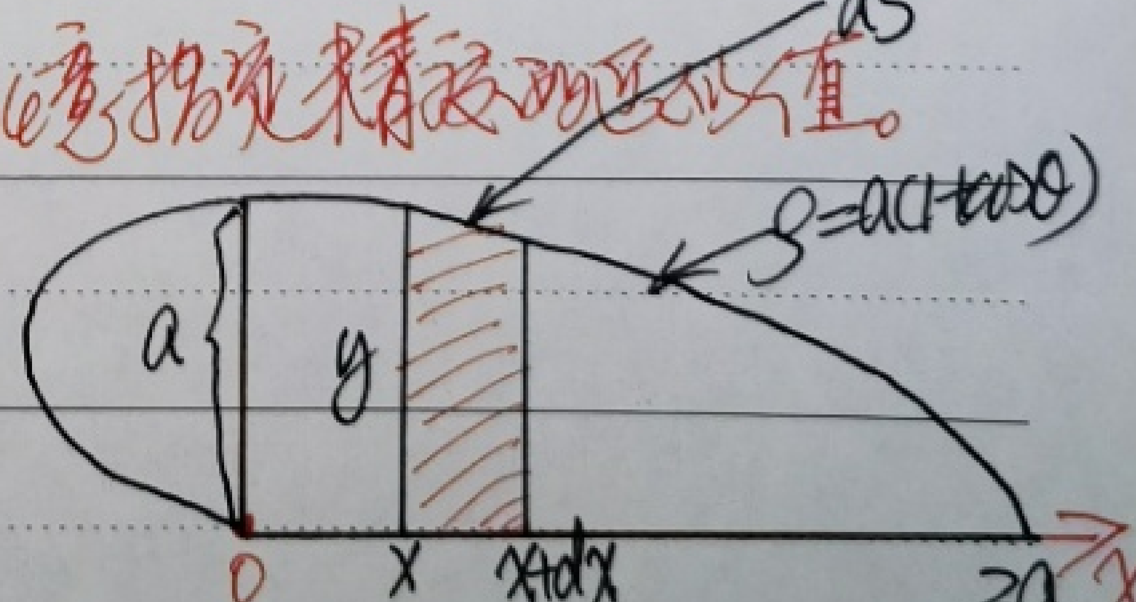
若取 $\sqrt{1-(e\cos\theta)^2}=(1-(e\cos\theta)^2)^{\frac{1}{2}}\doteq 1-\frac{1}{2}(e\cos\theta)^2$ 则

$S(L)=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\frac{e^2}{2}\cos^2\theta)d\theta=4a\times\frac{\pi}{2}-2ae^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=2\pi a-\frac{\pi}{2}ae^2$.

若取 $\sqrt{1-(e\cos\theta)^2}\doteq 1-\frac{1}{2}(e\cos\theta)^2-\frac{1}{8}(e\cos\theta)^4$ 则

$S(L)=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\frac{1}{2}(e\cos\theta)^2-\frac{e^4}{8}\cos^4\theta)d\theta=2\pi a-\frac{\pi}{2}ae^2-\frac{e^4}{8}\times\frac{3}{16}\pi$.

展开式(如6)取的项数愈多，计算 $S(L)$ 的精度就愈高。利用(如6)可获得椭圆弧长 $S(L)$ 的任意指定精度的近似值。



解(3)：∵ $dS_{侧}=2\pi y\,ds$

∴ $S_{侧}=2\pi\int_0^{\pi}y\,ds$

而 $\begin{cases} y=\rho(\theta)\sin\theta=a(1+\cos\theta)\sin\theta \\ ds=\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,d\theta=\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\,d\theta=\sqrt{a^2(2+2\cos\theta)}\,d\theta=2a\cos\frac{\theta}{2}d\theta \end{cases}$

$$S_{侧}=2\pi\int_0^{\pi}a(1+\cos\theta)\sin\theta\, 2a\cos\frac{\theta}{2}d\theta=8\pi a^2\int_0^{\pi}\cos^3\frac{\theta}{2}\,2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta$$

$$=16\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-2)\cos^4u\,d\cos u=-32\pi a^2\frac{1}{5}\cos^5u\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{32}{5}\pi a^2。$$

五). 用积分定义函数:

(1). 若 $f(x)\in C(I)$，则 $F(x)\triangleq\int_a^x f(t)dt$，$[a,x]\subset I$ 是可微函数.

且 $dF(x)=f(x)dx$，即 $F'(x)=f(x)$，$\forall x\in I$，即区间 I 上连续的函数

$f(x)$，在 I 上必有原函数 $=\int_a^x f(t)dt$，$\forall a\in I$. 因 a 可在 I 中任取，

故原函数 $\int_a^x f(t)dt$ 有无穷多个!

(2). $f(x)=\int_1^x\frac{dt}{t}=\ln x$. $\forall x>0$.

(3). $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$，$\forall x\in(0,+\infty)$. ——伽马函数.

(4). $B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$，$\begin{cases}x>0\\y>0\end{cases}$. ——贝塔函数.

六) 作业: ex5.1: 25/(1),(3); 28; 30;

ex5.3: 3/(2); 5/(2),(4).

Ⅱ. 计算反常积分 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+1}$ （本章中要用到此积分）

解：∵ $I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1-x^2}{1+x^4}+\frac{1+x^2}{1+x^4}\right)dx$，且 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-x^2}{1+x^4}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{1-x^2}{1+x^4}dx$ $+\int_{0}^{+\infty}\frac{1-x^2}{1+x^4}dx$，而 $\int_{-\infty}^{0}\frac{1-x^2}{1+x^4}dx\overset{x=-t}{=\!=}\int_{+\infty}^{0}\frac{1-t^2}{1+t^4}(-dt)=\int_{0}^{+\infty}\frac{1-x^2}{1+x^4}dx$，

故 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-x^2}{1+x^4}dx=2\int_{0}^{+\infty}\frac{1-x^2}{1+x^4}dx=-2\int_{0}^{+\infty}\frac{x^2-1}{1+x^4}dx=-2\int_{0}^{+\infty}\frac{1-x^{-2}}{x^{-2}+x^2}dx$

$=-2\int_{0}^{+\infty}\frac{d(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2}=-2\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right|\Bigg|_{0}^{+\infty}=-2[\ln 1-\ln 1]=0$.

同理，$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=2\int_{0}^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$

$=2\int_{0}^{+\infty}\frac{x^{-2}+1}{x^{-2}+x^2}dx=2\int_{0}^{+\infty}\frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}=\frac{2}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\Bigg|_{0}^{+\infty}$

$=\sqrt{2}\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\pi\sqrt{2}$.

所以，$I=\frac{1}{2}[0+\pi\sqrt{2}]=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$.

Ⅲ. 计算：$P.V.\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^4}$，

解：$x=0$ 为函数f的瑕点，$P.V.\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^4}\triangleq\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x^4}+\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x^4}\right]$

$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\frac{x^{-3}}{-3}\Big|_{-1}^{-\varepsilon}+\frac{x^{-3}}{-3}\Big|_{\varepsilon}^{1}\right]=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left[\frac{2}{3}\varepsilon^{-3}-\frac{2}{3}\right]=+\infty$.

即 $P.V.\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^4}$ divergence.

(四). 若 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\alpha$，$\alpha$是常数. 则必有: $P.V.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\alpha$.

但反之未必. 即从 $P.V.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\alpha\in R \not\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\alpha$.

证(1°). 已知 $\alpha=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{+\infty} f(x)dx=$

$\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)dx+\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)dx$ 且 $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)dx$ 与 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)dx$

都收敛. 设 $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)dx=A\in R$, $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)dx=B\in R$.

则 $\alpha=A+B$. 取 $a=-b$, 则 $a\to-\infty \Leftrightarrow b\to+\infty$, 且

$\alpha=A+B=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)dx+\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{-b}^0 f(x)dx+\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)dx$

$=\lim\limits_{b\to+\infty}\left[\int_{-b}^0 f(x)dx+\int_0^b f(x)dx\right]=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{-b}^b f(x)dx=P.V.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

即 $P.V.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\alpha$.

证(2°). 只要提供一个反例即可: 已知 $P.V.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx=$

$\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b}\frac{x}{1+x^2}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}0=0=\alpha\in R$, 但

$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{x}{1+x^2}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$ 中右边两项都发散.

故左边 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$ 发散, 即 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx\neq 0=P.V.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$