# 第31讲：反常积分（improper integral）

## (一) 反常积分的概念与分类：

(1). 称"双有"的积分，即有限区间 $[a,b]$ 上有界函数 $f(x)$ 的积分为"正常积分"或"常义积分"，记作 $\int_a^b f(x)dx$；

(2) 当上述"双有"至少有一个不成立时的积分为"反常积分"或"广义积分"。

(3). 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上定义，且对 $\forall\, b>a$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，若极限 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ 收敛于常数 $A$。则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛于 $A$，记作 $\int_a^{+\infty} f(x)dx = A$；若 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ 发散，则称广义积分或反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散。

(4). 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,a]$ 上定义，且对 $\forall\, b<a$，$\int_b^a f(x)dx$ 为正常积分，则定义：$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim\limits_{b\to-\infty}\int_b^a f(x)dx$；

(5) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上定义，则定义：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx$

且规定：当且仅当右边两个反常积分都收敛时，才称

右边两个$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$是收敛的；即有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)dx+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)dx \quad (注1)$$

(6). 设$f(x)\in(a,b]$上连续(或可积)，$f(a+0)=\infty$，则称$x=a$是$f(x)$的一个瑕点，称$\int_a^b f(x)dx$是具有瑕点$a$的瑕积分，规定：

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx;$$

(7) 设$f(x)\in[a,b)$上$C$，$f(b-0)=\infty$，则规定瑕积分：

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx;$$

(8) 若$f(x)\in[a,b]$的内点$x_0\in(a,b)$处无界：$f(x_0-0)=\infty$或$f(x_0+0)=\infty$，

则规定：$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{x_0}f(x)dx+\int_{x_0}^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{x_0-\varepsilon}f(x)dx+\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{x_0+\varepsilon}^b f(x)dx$ (注2)

当且仅当(注2)右边两个瑕积分都收敛时，才称左边是收敛的。

事实上，通过变量代换 上述6种反常积分可化为第1种反常积分：

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx\triangleq\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

其实任一种瑕积分都可化为无穷区间上的反常积分。

如：瑕点为 $a$ 的瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 只要令 $\frac{1}{x-a}=u$.

即 $x=a+\frac{1}{u}$，则 $dx=-\frac{1}{u^2}du$，$\int_a^b f(x)dx=\int_{+\infty}^{\frac{1}{b-a}} f(a+\frac{1}{u})\frac{-du}{u^2}$

$=\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f(a+\frac{1}{u})\frac{1}{u^2}du$，以 $b$ 点为瑕点的瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$，

只要令 $\frac{1}{b-x}=u$，则 $x=b-\frac{1}{u}$，$dx=\frac{1}{u^2}du \Rightarrow$

$\int_a^b f(x)dx=\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f(b-\frac{1}{u})\frac{1}{u^2}du$；

而 $\int_{-\infty}^b f(x)dx \xlongequal[\text{则 } dx=-dt]{\text{令 } x=-t} \int_{+\infty}^{-b} f(-t)(-dt)=\int_{b}^{+\infty} f(-t)dt$；

因此，反常积分中，重点是掌握：$\int_a^{+\infty} f(x)dx \triangleq \lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ 这种类型。

遇到 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)}$ 这种既是瑕积分，又是无穷区间的反常积分时

应首先分成两部分：$\int_0^a \frac{dx}{x(x+1)}$，$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)}$，$a>0$ 是任取的正

常数，通常取 $a=1$，当且仅当瑕积分 $\int_0^1 \frac{dx}{x(x+1)}$ 及无穷区间上的

反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)}dx$ 都收敛时，才称混合的反常积分

$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x(x+1)}dx$ 是收敛的。

(三) 反常积分的计算例子.

(1)、证明：第一类广义积分 $I(p) \triangleq \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ $(a>0, 常)$ 当 $p>1$ 时收敛，当 $p\le 1$ 时发散；收敛时，试求 $I(p)$ 的极值；

(2) 证明：第二类广义积分：$I(p) = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ $(a<b)$，当 $p<1$ 时收敛，当 $p\ge 1$ 时发散。

(3) 设 $\alpha>0$，证明 $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$ 收敛且 $I = \frac{\pi}{4}$.

(4)、证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.

(5) 求 $I = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos\beta x dx$ $(\alpha>0, \beta\ne 0, 常)$

(6) 求 $\int_0^1 \ln x dx$.

证(1)，$\because a>0$，$\therefore x=0$ 不是瑕点，$\int_a^{+\infty} x^{-p}dx$ 是一个分布到无穷限的反常积分，而当 $p>1$ 时，$\int_a^{+\infty} x^{-p}dx = \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_a^{+\infty}$

$= 0 - \frac{a^{1-p}}{1-p} = \frac{a^{1-p}}{p-1} \triangleq I(p)$，即 $p>1$ 时，收敛；

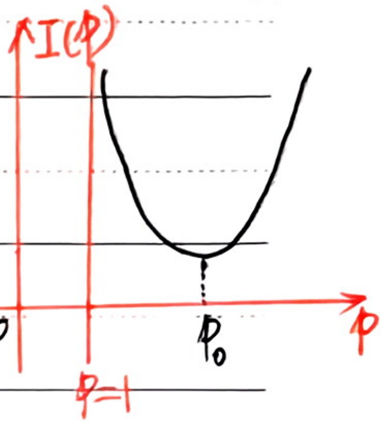
当 $p=1$ 时，$\int_a^{+\infty} x^{-1}dx = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_a^{+\infty} = +\infty - \ln a = +\infty$，div.

当 $p<1$ 时，$\int_a^{+\infty} x^{-p}dx = \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_a^{+\infty} = +\infty - \frac{a^{1-p}}{1-p} = +\infty$，div.

(4).

当 $p>1$ 时，$I(p)=\frac{a^{1-p}}{p-1}$，$(a>0)$，$\Rightarrow I'(p)=\frac{a^{1-p}\ln a(-1)(p-1)-a^{1-p}}{(p-1)^2}$

$=\frac{a^{1-p}}{(p-1)^2}[(1-p)\ln a-1]$，令 $I'(p)=0\Rightarrow$ 得唯一驻点 $p_0=1-\frac{1}{\ln a}$，




(1) 当 $0<a<1$ 时，$\ln a<0$，$p_0=1-\frac{1}{\ln a}>1$，从 $I'(p)<0$

$\Rightarrow(1-p)\ln a-1<0\Rightarrow p<1-\frac{1}{\ln a}=p_0$；从 $I'(p)>0\Rightarrow$

$p>p_0$，且 $I(1+0)=+\infty$，$I(+\infty)\xlongequal[b>1]{令a=\frac{1}{b}}\frac{b^{p-1}}{p-1}\Big|_{p=\infty}=+\infty$。

从而 $I(p_0)$ 是 $I(p)$ 的唯一极小值，且 $I(p)$ 在 $p>1$ 时无极大值，

因此，$I(p_0)$ 也是 $I(p)$ 在 $(1,+\infty)$ 中的最小值。

(2) 当 $a>1$ 时，$\ln a>0$，$p_0=1-\frac{1}{\ln a}<1$，即 $p_0$ 不在 $I(p)$ 的定义域内，

因此，$a>1$ 时，$I(p)$ 在 $(1,+\infty)$ 中无极值；

(3) 当 $a=1$ 时，$I(p)=\frac{1}{p-1}$ 在 $(1,+\infty)$ 中单减，无极值。

(例)如，设 $g(k)=\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k}\Rightarrow g(k)=\int_2^{+\infty}\frac{d\ln x}{(\ln x)^k}\xlongequal{\ln x=u}\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{du}{u^k}$，

$\because a=\ln 2\in(0,1)$，$\therefore$ 当 $k_0=1-\frac{1}{\ln(\ln 2)}$ 时，$g(k_0)$ 是 $g(k)$ 的极小(最小)值。

证(2)：当 $p<1$ 时，$\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^p}=\int_a^b(x-a)^{-p}d(x-a)=\frac{(x-a)^{1-p}}{1-p}\Big|_a^b$

$=\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$，即 $p<1$ 时 $\int_a^b\frac{dx}{(x-a)^p}$ 这个瑕积分收敛。

(5).

当 $p=1$ 时, $\int_a^b \frac{dx}{x-a} = \int_a^b \frac{d(x-a)}{x-a} = \ln|x-a|\Big|_a^b = +\infty$; div

当 $p>1$ 时, $\int_a^b (x-a)^{-p} d(x-a) = \frac{(x-a)^{1-p}}{1-p}\Big|_a^b = \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p} - \infty = -\infty$, div.

证(3): 令 $x=\tan u$, 则 $dx = \sec^2 u\,du$, $1+x^2 = \sec^2 u \Rightarrow$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 u\,du}{\sec^2 u\,(1+\tan^\alpha u)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{1+\tan^\alpha u}$$ 为正常积分, 必收敛.

为计算 I, 令 $x=\frac{1}{t}$, 则 $dx = -\frac{1}{t^2}dt$,

$$I = \int_{+\infty}^0 \frac{\frac{(-1)dt}{t^2}}{(1+\frac{1}{t^2})(1+\frac{1}{t^\alpha})} = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha dt}{(1+t^2)(1+t^\alpha)} = \int_0^{+\infty} \frac{(t^\alpha+1)-1}{(t^2+1)(t^\alpha+1)} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} - I = \arctan t\Big|_0^{+\infty} - I = \frac{\pi}{2} - I \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}。$$

证(4): 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx$, 令 $x=2t$ 则 $dx=2dt \Rightarrow$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin 2t)\,2dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln 2 + \ln\sin t + \ln\cos t)dt$$

$$= (2\ln 2)\frac{\pi}{4} + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin t\,dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t\,dt$$

而 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t\,dt \xlongequal[dt=-du]{令 t=\frac{\pi}{2}-u} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (\ln\sin u)(-du) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t\,dt$

$\therefore I = (2\ln 2)\cdot\frac{\pi}{4} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t\,dt = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2I \Rightarrow I = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$

解(5): $I = \frac{1}{\beta}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} d\sin\beta x = \frac{1}{\beta}\sin\beta x\, e^{-\alpha x}\Big|_0^{+\infty} + \frac{\alpha}{\beta}\int_0^{+\infty} \sin\beta x\, e^{-\alpha x}dx$

$$=0+\frac{-\alpha}{\beta^2}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}d\cos\beta x=\frac{-\alpha}{\beta^2}\left(e^{-\alpha x}\cos\beta x\Big|_0^{+\infty}+\alpha\int_0^{+\infty}\cos\beta x\, e^{-\alpha x}dx\right)$$

$$=\frac{-\alpha}{\beta^2}(-1+\alpha I)=\frac{\alpha}{\beta^2}-\frac{\alpha^2}{\beta^2}I\Rightarrow I=\frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\cdot\frac{\alpha}{\beta^2}=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}.$$

解(6)：$I=\int_0^1\ln x\,dx$ 的瑕点是 $x=0$ 的瑕积分.

$$I=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1\ln x\,dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(x\ln x\Big|_\varepsilon^1-\int_\varepsilon^1 x\frac{1}{x}dx\right)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}(0-\varepsilon\ln\varepsilon-(1-\varepsilon))=-\lim_{\varepsilon\to0^+}(\varepsilon\ln\varepsilon+1-\varepsilon)$$

且 $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\varepsilon\ln\varepsilon=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\dfrac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}}=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\dfrac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}}=-\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\varepsilon=0$

$\therefore I=\int_0^1\ln x\,dx=-(0+1-0)=-1$. 收敛。

称 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b}f(x)dx$ 为 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 的 Cauchy 主值，记作：

$$P.V.\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx\triangleq\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b}f(x)dx.$$

证明：若 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=A_0$(常数)，则必有 $P.V.\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=A_0$

但 $P.V.\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=A_0$ 时，$\not\Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=A_0$.

证：已知 $A_0=\int_{-\infty}^{0}f(x)dx+\int_0^{+\infty}f(x)dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{-b}^{0}f(x)dx+\lim\limits_{a\to+\infty}\int_0^{a}f(x)dx$

设 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{-b}^{0}f(x)dx=\alpha$ (常数)，$\lim\limits_{a\to+\infty}\int_0^{a}f(x)dx=\beta$(常数) 则

$A_0=\alpha+\beta$. 在 $\alpha=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{-b}^{0}f(x)dx$ 中令 $b=a$

则 $b\to+\infty$ 时，$a\to+\infty$ 且 $\alpha=\lim\limits_{a\to+\infty}\int_{-a}^{0}f(x)dx$

$$A_0=\alpha+\beta=\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{0}f(x)dx+\lim_{a\to+\infty}\int_{0}^{a}f(x)dx=\lim_{a\to+\infty}\left(\int_{-a}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{a}f(x)dx\right)$$

$$=\lim_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a}f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b}f(x)dx \text{ 即 } P.V.\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=A_0.$$

反之，已知 $P.V.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx\triangleq\lim\limits_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b}\frac{x}{1+x^2}dx=\lim\limits_{b\to+\infty}0=0=A_0$

但 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{x}{1+x^2}dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$ 中，$\because\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}$

$=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{0}^{+\infty}=+\infty$，$div$. $\therefore\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$ $div$，不收敛于 $A_0=0$.

设 $x_0\in(a,b)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的唯一瑕点，则定义瑕积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的Cauchy

主值：$P.V.\int_a^b f(x)dx\triangleq\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\left(\int_a^{x_0-\varepsilon}f(x)dx+\int_{x_0+\varepsilon}^{b}f(x)dx\right)$

同样，若 $\int_a^b f(x)dx=A_0$（常数），则 $P.V.\int_a^b f(x)dx=A_0$，

但 $P.V.\int_a^b f(x)dx=A_0 \not\Rightarrow \int_a^b f(x)dx=A_0$

(三) 作业：EX5.4

1/(1), (2), (4), (5), (6), (9), (11), (12)；3；4.

用两种方法计算下列反常积分：$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx$.

解法(一)：$\because \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}=\frac{x^2+1}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}=\frac{\frac{1}{2}}{x^2+x+1}+\frac{\frac{1}{2}}{x^2-x+1}$

$\therefore I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-x+1}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}[\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})]+\frac{1}{\sqrt{3}}[\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})]=\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\pi$.

解法(二)：分别考察$\int_{0}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx$与$\int_{-\infty}^{0}\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx$.

取$\varepsilon>0$，则$\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx=\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{1+x^{-2}}{x^2+1+x^{-2}}dx=\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+3}$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{3}}\Big|_{\varepsilon}^{+\infty}=\frac{1}{\sqrt{3}}[\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{\varepsilon-\frac{1}{\varepsilon}}{\sqrt{3}}]$，令$\varepsilon\to0^+$

则$\int_{0}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{\sqrt{3}}[\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{\varepsilon-\frac{1}{\varepsilon}}{\sqrt{3}}]$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}[\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})]=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$；

而$\int_{-\infty}^{0}\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx\xlongequal{\text{令}x=-u}\int_{+\infty}^{0}\frac{(u^2+1)(-du)}{u^4+u^2+1}=\int_{0}^{+\infty}\frac{(u^2+1)du}{u^4+u^2+1}$

$=\int_{0}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx$；故$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx=2\int_{0}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx$

$=2\times\frac{\pi}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\pi$.