# 第2讲：数列极限的性质与应用

一）复习数列极限的线性性质.

设 $a, b, c_1, c_2$ 为常数且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}(c_1 a_n + c_2 b_n) = c_1 a + c_2 b = c_1 \lim_{n\to\infty} a_n + c_2 \lim_{n\to\infty} b_n.$$

证(1°)，当 $c_1^2 + c_2^2 = 0$，即 $c_1 = c_2 = 0$ 时，命题显然成立.

(2°) 当 $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ 时，$|c_1| + |c_2| > 0$，从 $a_n \to a\ (n\to\infty) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists n_1 \in N^*$，对 $\forall n > n_1$，有 $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{|c_1| + |c_2|}$ 恒成立；从 $b_n \to b\ (n\to\infty)$ 对上述 $\varepsilon > 0$，$\exists n_2 > n_1$，$n_2 \in N^*$，对 $\forall n > n_2$，有 $|b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{|c_1| + |c_2|}$ 恒成立，也有 $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{|c_1| + |c_2|}$ 恒成立. 即有：对 $\forall n > n_2$

$$|(c_1 a_n + c_2 b_n) - (c_1 a + c_2 b)| \le |c_1||a_n - a| + |c_2||b_n - b| < \frac{|c_1|\varepsilon}{|c_1| + |c_2|} + \frac{|c_2|\varepsilon}{|c_1| + |c_2|} = \frac{|c_1| + |c_2|}{|c_1| + |c_2|}\varepsilon = \varepsilon$$ 恒成立.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}(c_1 a_n + c_2 b_n) = c_1 a + c_2 b = c_1 \lim\limits_{n\to\infty} a_n + c_2 \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 成立。

从上述极限的线性性质，不难得到以下结论：

(1) 当 $c_1=c_2=1$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n$，

(2) 当 $c_1=1, c_2=-1$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=a-b=\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}b_n$，

即对于收敛的数列而言，和差的极限等于极限的和差。

(3) 当 $c_1=k, c_2=0$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}(ka_n)=k\lim\limits_{n\to\infty}a_n=ka$.

即对于收敛的数列而言，常数因子可提到极限外面来。

(4) 数列的线性性质可推广到m个有限个收敛数列的情形：设 $a_{1n}\to a_1, a_{2n}\to a_2, \cdots, a_{mn}\to a_m$ $(n\to\infty)$ 且 $a_1, a_2, \cdots, a_m, c_1, c_2, \cdots c_m$ 均为常数，则必有：

$\lim\limits_{n\to\infty}(c_1a_{1n}+c_2a_{2n}+\cdots+c_ma_{mn})=c_1a_1+c_2a_2+\cdots+c_ma_m=$

$c_1\lim\limits_{n\to\infty}a_{1n}+\cdots+c_m\lim\limits_{n\to\infty}a_{mn}$，对 $\forall m\in N^*$ 成立。

(三) 数列极限的"四性"

(1) 有界性：若 $\{a_n\}$ 收敛，则 $\{a_n\}$ 必有界，反之未必。

(2) 唯一性：若 $\{a_n\}$ 收敛，则 $\{a_n\}$ 的极限是唯一的。

(3) 保号性：若 $a_n\geq 0(\leq 0)$，$\forall n\geq n_0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\in R$，

则必有 $a\geq 0$ ($a\leq 0$);

(七). 保序性: 若 $a_n \to a\in R$, $b_n\to b\in R$, ($n\to\infty$). 且对 $\forall n\geq n_0$

$a_n\geq b_n$ ($a_n\leq b_n$), 则必有 $a\geq b$ ($a\leq b$)。

证(1) 设 $a_n\to a\in R$ ($n\to\infty$). 则对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists n_0\in N^*$, 对 $\forall n\geq n_0$

$|a_n-a|<\varepsilon \Rightarrow |a_n|=|a_n-a+a|\leq|a_n-a|+|a|<\varepsilon+|a|$. 令

$M=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots|a_{n_0-1}|,\varepsilon+|a|\}$, 则 $M>0$, 且

$|a_n|\leq M$, $\forall n\in N^*$, 即 $\{a_n\}$ 有界. 反之有界数列未必收敛.

设数列 $\{a_n\}$ 为: 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, ⋯ 1, 0, ⋯ 则 $\{a_n\}$

有界, 但 $\{a_n\}$ 发散(divergence), 且属于"振荡发散"。

证(2): 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=b$, $a,b\in R$, 下证 $a=b$.

反证法: 若 $b\neq a$, 不妨设 $b>a$, 取 $\varepsilon=\frac{b-a}{2}$, 则 $\varepsilon>0$.

对此 $\varepsilon>0$, 从 $a_n\to a$ ($n\to\infty$) $\Rightarrow\exists n_1\in N^*$, 对 $\forall n>n_1$, 有

$a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon\Rightarrow a_n<a+\varepsilon=a+\frac{b-a}{2}=\frac{a+b}{2}$. 恒成立.

从 $a_n\to b$ ($n\to\infty$), 对上述 $\varepsilon>0$, $\exists n_2>n_1$, $n_2\in N^*$,

对$\forall n>n_2$，恒有：$b-\varepsilon<a_n<b+\varepsilon \Rightarrow b-\frac{b-a}{2}<a_n \Rightarrow$

$\frac{a+b}{2}<a_n<\frac{a+b}{2}$ 当$n>n_2>n_1$时恒成立，矛盾！故$b\leq a$，

当$a>b$时 取$\varepsilon=\frac{a-b}{2}$，同样得出矛盾 故 $a\leq b$.

即有$a=b$. 故收敛数列，其极限是唯一存在的。

证(3)：用反证法：若$a<0$，令$\varepsilon=\frac{-a}{2}$，则$\varepsilon>0$，对此

$\varepsilon>0$，由$a_n \longrightarrow a\ (n\to\infty)$，$\Rightarrow \exists n_1\in N^*$，对$\forall n>n_1$，有

$a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon \Rightarrow a_n<a+\frac{-a}{2}=\frac{a}{2}<0$ 恒成立，与题设

矛盾！故$a\geq 0$.

证(4)：令$c_n=b_n-a_n$，则$c_n\leq 0$，$\forall n\geq n_0$，且

$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}b_n-\lim\limits_{n\to\infty}a_n=b-a$，依(3)知，必有：

$b-a\leq 0$，即 $a\geq b$成立。

(三)收敛数列极限的四则运算法则：

设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$， $a,b,c_1,c_2$均为常数，则有：

(1). $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=a\pm b=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}b_n$；

(2). $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=a\cdot b=(\lim\limits_{n\to\infty}a_n)(\lim\limits_{n\to\infty}b_n)$；

(3). $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{a}{b}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$，$(b\neq 0)$

证(2)：从 $b_n\to b\ (n\to\infty)$ 可知，$\{b_n\}$ 有界，即 $\exists M>0$，使 $|b_n|\leq M$，对 $\forall n\in N^*$ 成立；从 $a_n\to a\ (n\to\infty)\Rightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1\in N^*$ 当 $n>N_1$ 时，$|a_n-a|<\varepsilon$ 恒成立，从 $b_n\to b\ (n\to\infty)$，对上述 $\varepsilon>0$，$\exists N_2>N_1$，$N_2\in N^*$，当 $n>N_2$ 时 $|b_n-b|<\varepsilon$ 恒成立，从而，当 $n>N_2$ 时

$|a_nb_n-a\cdot b|=|a_nb_n-ab_n+ab_n-ab|\leq|b_n|\,|a_n-a|+|a|\,|b_n-b|$

$<M\varepsilon+|a|\varepsilon=(M+|a|)\varepsilon$ 恒成立，即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=a\cdot b=(\lim\limits_{n\to\infty}a_n)(\lim\limits_{n\to\infty}b_n)$，不难证明：当 $a_{1n}\to a_1$，$a_{2n}\to a_2$，…，$a_{mn}\to a_m$，$(n\to\infty)$，$a_1,a_2,\cdots a_m$ 均为常数时，仍有：

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{1n}a_{2n}\cdots a_{mn})=a_1a_2\cdots a_m=(\lim\limits_{n\to\infty}a_{1n})(\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n})\cdots(\lim\limits_{n\to\infty}a_{mn})$

特别地，当 $a_{1n}=a_{2n}=\cdots=a_{mn}$ 时，有

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^m = a_1^m = (\lim\limits_{n\to\infty}a_n)^m$，即对收敛数列而言，幂的极限，等于极限的幂。

证(3)：不妨设 $b>0$，取 $\varepsilon=\frac{b}{2}$ 则 $\varepsilon>0$，对此 $\varepsilon>0$，由 $b_n\to b$ $(n\to\infty)$，$\exists N_1\in N^*$ 当 $n>N_1$ 时，$b-\varepsilon<b_n<b+\varepsilon$ 恒成立，即 $b_n>b-\frac{b}{2}=\frac{b}{2}$ 恒成立，另从 $b_n\to b$ $(n\to\infty)$ 知，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N_2>N_1$，$N_2\in N^*$，当 $n>N_2$ 时，$|b_n-b|<\varepsilon$ 及 $b_n>\frac{b}{2}$ 恒成立。

从而 $\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right|=\frac{|b_n-b|}{b\,b_n}<\frac{|b_n-b|}{b\cdot\frac{b}{2}}=\frac{2}{b^2}|b_n-b|<\frac{2\varepsilon}{b^2}$

在 $n>N_2$ 时恒成立，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{b}$。依(2)可知：

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\frac{1}{b_n}=(\lim\limits_{n\to\infty}a_n)(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b_n})=a\cdot\frac{1}{b}=\frac{a}{b}$，$(b\neq0)$

四 例题：

例1. 设 $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$，$n\in N^*$，证明：

(1). $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e\approx2.71828182\,8$.

(2). $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e=\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x$，$x\in R$

(3). $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$，$x\in R$.

例2：证明闭区间套定理：若(1) $[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}]$，$n=1,2,3,\cdots$，(2) $b_n-a_n\to 0\ (n\to\infty)$，则存在唯一实数$\alpha$，$\alpha\in[a_n,b_n]$，$\forall n\in N^*$.

(注(1)：闭区间套定理，是刻画实数系R连续性的五个等价公理之一)

~~证例1(1)~~、利用平均值不等式：$(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}\le\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，

可知：$(a_n\cdot 1)^{\frac{1}{n+1}}=\left((1+\frac{1}{n})^n\cdot 1\right)^{\frac{1}{n+1}}=\left((1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})\cdots(1+\frac{1}{n})\cdot 1\right)^{\frac{1}{n+1}}$

$\le\left(1+\frac{1}{n}+1+\frac{1}{n}+\cdots+1+\frac{1}{n}+1\right)/_{n+1}=\frac{n+2}{n+1}=1+\frac{1}{n+1}\Leftrightarrow$

$a_n\le(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}=a_{n+1}$ 恒成立，即$\{a_n\}$是单调递增的。又

$a_n=(1+\frac{1}{n})^n=1+C_n^1\frac{1}{n}+C_n^2(\frac{1}{n})^2+C_n^3(\frac{1}{n})^3+\cdots+C_n^n(\frac{1}{n})^n$

$=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$

$<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}$

$<2+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}=2+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots$

$\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=3-\frac{1}{n}<3$ 恒成立，即$\{a_n\}$上有界，依单调有界数列极限存在准则，$\{a_n\}$收敛于一个实数。

为了纪念数学家Euler(欧拉)在其中的贡献巨大，特把这个常数记作$e$，即$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$，经计算可知，$e$的前$n$位为$2.71828 1828$。精确些作证明$e$是一个无理数，且将以$e$为底的对数记作$\ln x$，即$\ln x=\log_e x$。

记(2)/(1)，对$\forall x>1$，$x\in R$，$\exists n\in N^*$，使$n\le x<n+1$ $\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}\le\frac{1}{n}\Rightarrow(1+\frac{1}{n+1})^n<(1+\frac{1}{x})^x<(1+\frac{1}{n})^{n+1}$$

且$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n+1})}=\frac{e}{1}=e$，

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n})=e\cdot1=e$，So由夹逼准则，$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$。

记(2)/(2)：当$x<0$时，令$y=-x$，则$y>0$且$x\to-\infty$时，$y\to+\infty$，即$\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x\xlongequal{\text{令}x=-y}\lim\limits_{y\to+\infty}(1+\frac{1}{-y})^{-y}$

$=\lim\limits_{y\to+\infty}(1+\frac{1}{y-1})^y=\lim\limits_{y\to+\infty}(1+\frac{1}{y-1})^{y-1}(1+\frac{1}{y-1})=e\cdot1=e$

记例2/(1)：从$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset[a_3,b_3]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$

$\Rightarrow \{a_n\}$单增有上界$b_1$，$\{b_n\}$单减有下界$a_1$，依单调有界数列极限存在准则，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$皆收敛。设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in R$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \in R$，则 $a=\sup\{a_n\}$，$b=\inf\{b_n\}$。

即 $a_n \le a$，$b \le b_n$ 皆成立。另外，$b=\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty}[(b_n-a_n)+a_n]$ $=\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)+\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0+a$，即 $a=b$。设 $a=b=\alpha$，则 $a_n \le \alpha = a = b \le b_n$，$\forall n\in N^*$，即存在实数 $\alpha \in [a_n, b_n]$，$\forall n \in N^*$，再有收敛数列极限存在的唯一性知 $a$ 是唯一的，即 $\alpha = a$ 也是唯一的。

(五) 作业：

(1). ex1.2：14；15(3),(4)；16；18(3)；22(2),(4)；

(2). 第一章综合题：3(2).

(注②. 在函数极限中，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \in R \Longleftrightarrow \begin{cases} ① \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \\ ② \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A. \end{cases}$

此特征在函数极限中将会有说明)

# 第3讲：数列极限习题课(学生)

(2024.9.13周)

(一) 证明：(1). $(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$，$\forall n\in N^*$

(2). $\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$，$\forall n\in N^*$.

(3). $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}$，即 $\sqrt[n]{n!}\cdot e\sim n$ $(n\to+\infty)$.(等价无穷大).

(二) 设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$，$n\in N^*$. 证明：

(1). $\{a_n\}$收敛；(2). $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n})=\ln 2$；

(3). $\lim(\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+2n})=\ln\frac{5}{3}$；(4). $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\sim\ln n$

(三) 证明 Stolz (施笃兹) Th：若 $\begin{cases} ① & b_n\uparrow+\infty \text{(严格增)} \\ ② & \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}}=A, \end{cases}$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$，A为常数或 $A=\pm\infty$ 都成立.

(四) 证明：(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\in R$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，

(2). 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$，且 $a_i>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

(3). 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=a>0$ 且 $a_i>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=a$.

(五) 设 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 是m个常数，证明：对 $\forall m\in N^*$，
$\lim\limits_{n\to\infty}(|a_1|^n+|a_2|^n+\cdots+|a_m|^n)^{\frac{1}{n}}=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_m|\}$.

By ①.

(六) 证明：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\frac{1}{2}$；$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}=\frac{1}{3}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^4}=\frac{1}{4}$；$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^m+2^m+\cdots+n^m}{n^{m+1}}=\frac{1}{m+1}$，$\forall m\in N^*$.

(七) 设 $a_n=4^{-n}C_{2n}^{n}$，$n\in N^*$，证明：对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists n\in N^*$，使 $a_n<\varepsilon$.（新生入学摸底试题）. 并证 $\{a_n\}$ 单调减。

(八) 作业：（第3讲的作业）

(1) EX1.2：9；13；$\frac{18}{(5)}$；20；$\frac{22}{(8)}$；23；

(2) ch1综：$\frac{10}{(1)}$；11.

(九) 第4讲：实数系连续性的五个等价命题（预告）
(2024.9.14日)

请同学们预习课本 Th1.11；Th1.13；Th1.15；Th1.16；Th1.18，分别是确界原理、单调有界数列有极限定理、闭区间套定理、列紧性定理、柯西(Cauchy)收敛准则。

（注：Stolz Th中，若 $A=\infty$，则未必有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A=\infty$.
例如：设 $a_n=(-1)^n n$，$b_n=n$，则 $b_n\uparrow+\infty$（严），且 $\frac{a_n-a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}}=\frac{(-1)^n n-(-1)^{n+1}(n+1)}{-1}$
$=(-1)^{n+1}(-n-n+1)=(-1)^{n+1}(-2n+1)\longrightarrow\infty$ $(n\to\infty)$，但
$\frac{a_n}{b_n}=\frac{(-1)^n n}{n}=(-1)^n$ 振荡div.)

附(2).