数学分析习题课讲义

2024.8.26

目录

1 数列极限

1.1 实数理论

课本上写到, 实数公理化表述为如下的定理：

定理 1.1. *任何两个实数之间一定存在一个有理数。*

这句话暗示了两个信息, 一实数 (集合) 有序, 即实数 (元素) 可比较, 而虚数不是有序的；二实数是稠密的, 即实数之间没有间隙, 而正整数不是稠密的。大家以后看到这种“显然”的命题定理, 可以试一试这样反向拆解.

1.2 极限的定义

定义 1.2. *设 a_n 是给定的数列. 如果有一个实数 a 具有下列性质: 对任意给定的一个正数 ε, 总存在正整数 $N = N(\varepsilon)$, 使得当 $n > N$ 时, 不等式*

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

成立, 那么称实数 a 是数列 a_n 的极限, 记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

此处的定义给出的不等式 $|a_n - a| < \varepsilon$ 是核心, 这个定义可以拆分成这几句来理解:

1. 极限是对于数列而言的, 我们用的说法是设数列 $\{a_n\}$ 有极限 a. 极限是一个具体的数.
2. 极限定义为满足某一性质的数, 这个性质与给定的数列有关. 可以类比实数除法:” 如果一个实数 r 满足: 对给定的两个实数 p 和 $q(q \neq 0)$, 若存在一个实数, 使得 $p = qr$, 那么称实数 r 是 p 除以 q 的商, 记为 $r = \frac{p}{q}$.” 商由等式定义, 极限由不等式定义.
3. 不严谨的说,$\forall \varepsilon > 0$ 暗示了: 随着 ε 的减小, 要取的 N 也会变大;
4. 证明 a 为数列 $\{a_n\}$ 的极限时, 意在构造 N, 说的定义法求极限, 本质都是

构造 $N=N(\varepsilon).N(\varepsilon)$ 是 ε 的函数, 但其实不一定显含 ε, 证明 $\frac{1}{n}$ 收敛时可以将 N 写成 $N=N(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}$; 证明极限的线性性质的时候不是显含的.

5. 找到 N 之后, 怎么判断 N 是否满足要求呢, 就是看不等式 $|a_n-a|<\varepsilon$ 是否成立, 这里右侧不要求一定是 ε, 只要当 ε 趋近 0 的时候也趋近 0 即可.

6. 已知收敛的话, 则可以将定义作为条件.

例 1.3. *证明极限的线性性.*

上面的解释的第 6,4,5 条, 可以辅助理解下面的证明.

解. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N_1 s.t.\forall n>N_1,|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{|c_1|+|c_2|}$;

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N_2 s.t.\forall n>N_2,|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{|c_1|+|c_2|}$;

设 $N=max\{N_1,N_2\}$, 则 $\forall n>N$, 有 $n>N_1,n>N_2$, 则有 $|c_1a_n+c_2b_n-(c_1a+c_2b)|\leq|c_1||a_n-a|+|c_2||b_n-b|<\varepsilon$ □

但下面这么写也可以, 看你觉得哪个好理解写哪个.

解. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N_1 s.t.\forall n>N_1,|a_n-a|<\varepsilon$;

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N_2 s.t.\forall n>N_2,|b_n-b|<\varepsilon$;

设 $N=max\{N_1,N_2\}$, 则 $\forall n>N$, 有 $n>N_1,n>N_2$, 则有 $|c_1a_n+c_2b_n-(c_1a+c_2b)|\leq|c_1||a_n-a|+|c_2||b_n-b|<|c_1|\varepsilon+|c_2|\varepsilon$ □

之后的所有" 对于任意的..., 存在..., 使得..." 句式中存在... 的参数 (在这里是 N) 都依赖前面的参数 (在这里是 ε), 并且基本都会将 $N(\varepsilon)$ 简写为 N.

若干个相邻的任意可以合并成一个任意, 若干个相邻的存在可以合并成一个存在. 当... 也表示任意.

例 1.4. *请考虑以下语句的含义*

1. 对于任意的 ε, 存在 b, 使得 $|a-b|<\varepsilon$.

2. 存在 b, 对于任意的 ε, 使得 $|a-b|<\varepsilon$.

例 1.5. *请考虑以下对极限的定义, 分别表示什么含义, 是否有良定性 (即是否有唯一性)*

1. 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$.

2. 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 存在 $n > N$, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$ 成立.

3. 存在 $N \in \mathbb{N}$, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$.

4. 对于任意的 $N \in \mathbb{N}$, 存在 $\varepsilon > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$.

5. 对于任意的 $N \in \mathbb{N}$, 存在 $\varepsilon > 0$, 存在 $n > N$, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$.

6. 对于任意的 $N \in \mathbb{N}$, 任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $n > N$, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$.

1. 定义
2. 建议先化简两个存在语句, 数列取 $1, 2, 3, 4, \cdots$, 则收敛到任意正数
3. 数列从某一项开始之后都为常数, 无意义
4. 数列有界, 收敛到任意数
5. 任意数列都存在极限, 极限可以为任意数, 取 $n = N + 1, \epsilon = |a - a_n| + 1$
6. 常数列

1.3 $\varepsilon - \delta$ 语言

N 的存在性一般由构造来得出

例 1.6. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$

$\forall \varepsilon > 0$, 欲求 N, 使得 $|\sqrt[n]{n+1} - 1| < \varepsilon$, 记 $a_n = \sqrt[n]{n+1} - 1$, 则

$$1 + n = (1+\alpha)^n = 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2 + \cdots + \alpha^n \geq \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2$$

因此

$$0 < \alpha < \sqrt{\frac{2(n+1)}{n(n-1)}} \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon$$

对每一个不等号组成的不等式组求解, 就可以得到 n 的范围了, 即得 $N = max\{2, \frac{4}{\varepsilon^2} + 1\} + 1$

1.4 极限运算

我们常用的加减乘除是一个二元运算, 运算结果是一个数。而数列极限是一种新的运算, 处理对象为数列, 处理结果为一个新的数.

加法有一条很显然的性质：两个正数相加仍为一个正数, 这一条性质可以叫做加法对正数封闭, 也可以说 $\mathbb{R}$ （某个集合）是保持对加法封闭的. 大家可以自行验证：$\mathbb{Z}$,$\mathbb{R}$ 对极限不封闭.

很多运算的性质在无穷的情况下是不成立的,

例 1.7. 请给出例子或计算

1. 无穷数列极限不为无穷大

2. 举一例有理数列的极限为无理数

2. 正项级数极限不为正数

3. 无理数对有限幂次运算不封闭 *(*考虑 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$*)*

4. 求和

$$1-1+1-1+1-1+\cdots$$

$$1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots$$

5. a 为正实数, 数列 $a, a^a, \cdots, a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ 可以收敛也可以不收敛

6. 证明整数对极限运算封闭

解. 3. 这里为了展示构造性证明, 实际上有更简单的例子.

4. 前者不能求和, 后者可以求和. 要想清楚, 这是两个数列 (把前 n 项的和看成数列), 你可以由数列极限的唯一性轻松反证.

这个例子说明了结合律在无穷的情况下不成立, 你可以自己找一个使得交换律在无穷情况下不成立的例子.

5. 可以自行求一下 a 取什么值的时候, 这个数列恰好收敛. 这一问还说明了一个问题: 有限的幂次和无限的幂次是两种不一样的运算. 事实上, 有限和无限次的基本算数运算大都是不一样的.(取集合运算也不一样)

□

有一个与对极限封闭很相似的说法, 称呼为保极限. 但对极限封闭与否是一个集合的性质, 而保极限与否是一个运算的性质, 准确的说是映射的性质.

如果一个映射 f 与一个极限运算可以任意交换顺序, 那么说这个映射 f 是保极限的. 课本定理 1.5 的意义便是在于证明了极限是保 (有限的) 四则运算的.

定理 1.8. *课本定理 1.5*

设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是两个收敛数列, 则通过四则运算形成的新的数列 $\{a_n \pm b_n\}$, $\{a_n b_n\}$, $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$（当 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$ 时）都收敛, 且有

1° $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

2° $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, *特别, 有* $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, *其中 c 是一个常数.*

3° $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, *其中* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

但是极限与极限, 极限与函数, 极限与运算大都是不可交换的, 如课本例 1.2.6, 如下的做法是完全错误的:

例 1.9. *请说明错误在哪里*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} + \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2} + \cdots + \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2} = 0$$

解. 第一步将分子拆开是错误的, 对内有限, 对外无限, 无限加法不可交换.

请注意 $0\cdot\infty$ 的意义, 在我们目前学的空间内 ∞ 并不是一个数, 这个表达式实际上没有意义. 在一些特定场合, 他实际上是 $0+0+\cdots+0$ 的简写 (当然也可能有其他的形式), 也就是 0. 这个简写不够严谨, 实际上也交换了极限与加法. □

例 1.10. *请说明错误在哪里* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{1/n} = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^{1/n}$

解. 我们对整一个数列做极限运算, 而不是对数列中的每一个数做极限运算. 这个式子的意义是 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{1/n}$ 是一个数, 而 $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^{1/n}$ 是一个数列. 前者与 n 无关, 后者与 n 有关. □

1.5 极限

例 1.11. 判断正误:

1. 若 $\{a_n\}$ 收敛, 则有 $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0, \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$
2. 正无穷大数列是否一定单调增加? 无界数列是否一定是无穷大量?
3. 收敛数列是否一定是单调数列? 无穷小量是否一定是单调数列?

解. 1. $(\frac{1}{2})^n$

2. 无穷大和无穷小都不是一个具体的数, 拿他当具体的数进行谈论没有意义 (不符合常规的运算 $1+\infty=\infty, 2\cdot\infty=\infty$), 只是一个趋势.

□

例 1.12. $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$

解. $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdots\frac{n}{n}$ □

例 1.13. 请证明:

1. 设 $b>0, \lim_{n\to\infty}=a$, 则 $\lim_{n\to\infty}b^{a_n}=b^a$
2. 设 $\lim_{n\to\infty}=a$, 则 $\sin a_n=\sin a$

例 1.14. 请计算:

1. $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0 \quad (a>0)$
2. $\lim_{n\to\infty}\frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}$
3. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_k>0$, 求 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}$
4. 设 $\{a_n\}$ 收敛于 $a>0$, 求 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$
5. 设 $0<x_0<\frac{\pi}{2}, x_n=\sin x_{n-1}$, 证明收敛并求极限

注记 1.15. *1,2,3,4.* 夹逼,*stolz*, 都很常见

5. 迭代生成的数列很多都是单调性有界证明收敛, 可能有一种题型借着体会收敛速度让你放缩证明不等式.

提醒不能使用洛必达, 因为这是数列, 其次洛必达没有证明, 我们学过的方法现在只有夹逼之类的. 这提醒了两个事情, 一包括考试上证明题自己使用的非课本上的定理都要给出证明, 二注意定理的使用条件, 定理越强条件限制越大, 只背结论不背条件不是好习惯.

例 1.16. 证明单调数列收敛的充要条件是存在收敛子列

1.6 Cauchy 列

注记 1.17. *Cauchy 列, 即基本列, 和收敛列等价, 是有条件的. 在有限维空间中, 基本列和收敛列等价, 但在无限维空间中, 基本列和收敛列不等价.(我在初次学习的时候很疑惑为什么要单独取一个名字, 直接介绍 Cauchy 收敛定理不好吗? 后来才知道他在无限维空间不是等价的)*

Cauchy 收敛定理的优点在于不需要事先知道收敛值就可以判断是否收敛; 使用 Cauchy 收敛定理的否命题判定不收敛也可能比定义判定方便.

定理 1.18. *Cauchy 收敛定理的否命题判定不收敛:*

对任意正整数 n, 存在 $p > n$, 使得 $|a_p - a_n| > \varepsilon_0$, 其中 ε_0 为给定的常数, 则数列 $\{a_n\}$ 不收敛.

例 1.19. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$ 不存在

证明. 对于任意 n, 存在 $p_1 = [\frac{n}{\pi}]\pi + \frac{3}{2}\pi, p_2 = [\frac{n}{\pi}]\pi + \frac{5}{2}\pi > [\frac{n}{\pi} + 1]\pi > n$, 使得 $|a_{p_1} - a_n|, |a_{p_2} - a_n| > \frac{1}{2}$ 二者至少有其一成立。

□

注记 1.20. *其实我们不满足于这个结果, 在深入的学习中会发现这个数列的极限点几乎可以取遍 $[-1, 1]$, 或者对于任 $[-1, 1]$ 中的点, 都可以找到一个子列收敛到这个点. 这个问题的构造从知识结构上现在就可以解决.*

1.7 闭区间套定理与列紧性

定理 1.21. *闭区间套定理:*

若 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一列闭区间, 且满足 $a_{n+1} \le a_n \le b_n \le b_{n+1}$, 则存在唯一的实数 ξ, 使得 $\xi \in [a_n, b_n], n = 1, 2, \cdots$

分析中有两个比较重要的概念, 一个是极限, 另一个是拓扑空间. 给出一些他们的形象化理解 (比如高维空间). 闭区间套定理的意义在于他的拓展已经脱离了实数数列的范畴, 而是在拓扑空间中的一个定理. 闭区间套定理常用于证明相对抽象的问题, 不太直接用于求数列的极限.

(补充 wflx 中的九宫格)

例 1.22. *证明: 实数集 $\mathbb{R}$ 不可列.*

可列定义为可以一一对应到自然数集 $\mathbb{N}$ 的集合, 或者等价的说, 可以写成一个数列.

证明. 反证法: 仅考虑 $[0,1]$ 区间, 假设 $[0,1]$ 可列, 将 $[0,1]$ 三等分为 $[0,1/3],[1/2,2/3],[2/3,1]$, 则存在至少一个区间不包含 x_1, 记为 $[a_1,b_1]$, 再将 $[a_1,b_1]$ 三等分, 重复上述操作, 得到一个闭区间套, 由闭区间套定理知存在唯一的实数 ξ, 使得 $\xi \in [a_n,b_n], n = 1,2,\cdots$, 而 ξ 不为任意 x_n, 矛盾. □

例 1.23. *"开区间套定理"的反例*

$\{(0,\dfrac{1}{n})\}$.

例 1.24. *函数 f 在 $[a,b]$ 上局部有界, 则 f 在 $[a,b]$ 上有界. 局部有界是指对于任意 $x \in [a,b]$, 存在 $\delta > 0$, 使得 f 在 $(x-\delta, x+\delta)$ 上有界.*

证明. 反证法: 假设 f 在 $[a,b]$ 上无界, 将 $[a,b]$ 三等分, 则至少存在一个区间无界, 记为 $[a_1,b_1]$, 再将 $[a_1,b_1]$ 三等分, 重复上述操作, 得到一个闭区间套, 由闭区间套定理知存在唯一的实数 ξ, 使得 $\xi \in [a_n,b_n], n = 1,2,\cdots$.

由局部有界性知存在 $\delta > 0$, 使得 f 在 $(\xi-\delta,\xi+\delta)$ 上有界. 而由闭区间的长度趋于 0 知, 存在 N, 使得 $[a_N,b_N] \subset (\xi-\delta,\xi+\delta)$, 矛盾. □

定义 1.25. *有界数列必有收敛子列.*

这也是一个拓扑空间的概念, 我们在这里注意到六个命题彼此等价, 为什么我要将他们命名成同一个性质. 这不仅是由于他们表述的不同, 更是因为他们在一些拓扑结构下不一定成立. 有趣的一点是, 我们可以将这些性质成立的空间依次命名, 比如列紧空间 (列紧性存在的空间), 完备空间 (Cauchy 定理成立的空间).

我们在前面提到我们认为 $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{Q}$ 经过取极限运算得到的. 因此一个典型的列进性不存在的空间是 $\mathbb{Q}$, 其中有界数列不一定有收敛子列.

列紧性也不适合用于求极限, 因为列紧性只保证了有收敛子列, 但不保证极限存在. 不过我们可以用以下性质来刻画数列.

命题 1.26. *数列 $\{a_n\}$ 的某个子列收敛于 a 的充要条件在 a 的任意小邻域内有无穷多项.*

用两个实数连续性的等价命题作为工具, 能证明许多命题.

命题 1.27. *函数 f 对区间 (a,b) 中的任一点 ξ, 存在 $\delta>0$, 使得 $\forall x\in(\xi-\delta,\xi+\delta), x>\xi$ 有 $f(x)>f(\xi)$, $x<\xi$ 有 $f(x)<f(\xi)$, 则 f 在 (a,b) 上严格增.*

1.8 子列

例 1.28. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}=a, \lim\limits_{k\to\infty}a_{2k+1}=a$

证明. 只证明充分性。

按已知条件 $\forall\epsilon>0,\exists N_1>0$, 当 $n>N_1$ 时 $|x_{2n}-a|<\epsilon$。

又 $\exists N_2>0$, 当 $n>N_2$ 时 $|x_{2n+1}-a|<\epsilon$。于是令 $N=\max\{2N_1,2N_2+1\}$, 则 $n>N$ 时恒有 $|x_n-a|<\epsilon$。故 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$。

请读者将此结果推广到 k 个子列的情况。 □

命题 1.29. *数列有界的充要条件为他的每个子列有收敛子列.*

命题 1.30. *数列收敛的充分必要条件是存在一个数 a, 使数列的每个子列有收敛于 a 的子列.*

1.9 总结

1. 理解数列极限的 $\epsilon-N$ 定义: 会用定义求证数列极限. 基本方法是解 $|a_n-a|<\varepsilon$.

2. 掌握数列极限的性质: 有界性, 保号性, 不等式性, 数列极限与子列极限的关系.

3. 掌握求数列极限的方法: 定义, 夹逼, 四则运算; 单调有界判断收敛, 再递推两边取极限; 用函数极限求数列极限, 若干重要极限,Stolz.

1.10 经典错误

例 1.31. 概念判断，充分和必要分别判断对错.

1. 若 $a_n > 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \iff \lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a \iff \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.
4. a_n 中任意两个子列 $\{a_{k_n}\}$ 和 $\{a_{l_n}\}$ 均有 $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{k_n} - a_{l_n}) = 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, a \in \mathbb{R}$.
5. $a_n > 0, \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = l > 1 \implies \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
6. 若 $a_n \neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \neq 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.
7. 无界数列一定是无穷大量。
8. 非负数列极限是非负数，正项数列极限是正数。
9. 若数列 $\{a_n\}$ 是单调数列，则 $\{a_n\}$ 收敛 $\iff$ $\{a_n\}$ 有收敛子列。
10. 若对任意 $n, p \in \mathbb{N}^*$, 均有 $|a_{n+p} - a_n| < \dfrac{p}{n^2}$，则数列 $\{a_n\}$ 收敛。
11. 若数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$, 则必有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$。
12. 判断数列 $\{a_n + b_n\}, \{a_n \cdot b_n\}$ 的发散性：
    (a) 若数列 $\{a_n\}$ 收敛，数列 $\{b_n\}$ 发散；
    (b) 若数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 皆发散。
13. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l, \lim\limits_{y\to y_0} g(y) = x_0 \implies \lim\limits_{y\to y_0} f(g(y)) = l$.

1. $\not\Rightarrow$, 反例: $a_n = \dfrac{1}{2^n}$; $\not\Leftarrow$, 反例: $a_n = 1$.
2. $\Rightarrow$，定义法证明即可；$\not\Leftarrow$，反例: $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.
3. $\not\Rightarrow$，反例: $a_n = (-1)^n$。$\Leftarrow$, 截成两段再用定义证明即可，或者运用 *Stolz* 定理。

4. ⇒。利用反证法，并把 $\{a_n\}$ 发散转化成 *Cauchy* 列形式；⇍。利用第 2 条的结论即可。

5. ⇒.$\exists q$ 满足 $l^{-1} < q < 1$ 及 $\exists n \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时, 有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q \quad \Rightarrow \quad a_n < a_N \cdot q^{n-N} \quad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

6. ⇒ 定义法证明即可；⇍，反例: $a_n = n$.

7. 错误。反例: $a_n = n(1-(-1)^n)$.

8. 正确，错误。反例: $a_n = \dfrac{1}{n}$.

9. ⇔。用定义证明即可。

10. 正确。$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \left\lceil \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$, 当 $n > N$ 时, 对 $\forall p > 0$, 有

$$|a_{n+p}-a_n| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k - a_{k-1}| < \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} \le \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k-1)} < \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon,$$

由 *Cauchy* 收敛准则知 $\{a_n\}$ 收敛。

11. 不成立。构造数列: $a_n = \dfrac{1}{2} + (-1)^n \cdot \dfrac{1}{2} = 0, 1, 0, 1, \cdots, b_n = 1, 0, 1, 0, \cdots$。

12. (a) 发散, 未知;(b) 未知; 未知

13. 取 $f(x) = I_{x=0}(x), g(y) = 0$.

例 1.32. 请指出以下做法的错误.

已知 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = a$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} a_1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a \cdot a \cdots a \cdot a_1} = a$$

解. 只有当 n” 极大” 的时候, 才有比值 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ 与 a 相隔的很近, 因此无论是直接把所有比值换成 a 还是说无穷大的时候换成 a, 都是错误的. □

1.11 数列极限习题

这部分自己随便挑着算一算.

习题 1.1. 综合计算

1. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x_{n-2}) = 0$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = ab$

3. $\forall k \in N_+, p_k > 0$; $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_n}{\sum_{i=1}^n p_i} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 证明:
$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_1 a_n + p_2 a_{n-1} + \cdots + p_n a_1}{\sum_{i=1}^n p_i} = a$

4. $x_1 = 1, x_n = 1 + \dfrac{1}{1 + x_{n-1}}$; 证明 $\{x_n\}$ 收敛并求极限.

5. $x_1 > 0, a > 0, x_{n+1} = \dfrac{1}{4}(3x_n + \dfrac{a}{x_n^3})$; 证明 x_n 收敛并求极限.

6. $a_n = \dfrac{b_{n-1} + c_{n-1}}{2}, b_n = \dfrac{a_{n-1} + c_{n-1}}{2}, c_n = \dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$; 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$

7. 证明: $e(\dfrac{n}{e})^n < n! < en(\dfrac{n}{e})^n$.

例 1.33. 阶的渐进估计.

设 $a = 1, a_n = a_{n-1} + \dfrac{1}{a_{n-1}}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{2n}}, \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n}(a_n - \sqrt{2n})}{\ln n}$.

证明.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n}(a_n - \sqrt{2n})}{\ln n}\\
=&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{a_n}{\sqrt{2n}} + 1}\cdot\frac{a_n^2 - 2n}{\ln n}\right)\\
=&\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2 - 2n}{\ln n}\\
=&\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2 - 2n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}\\
=&\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n^2 - 2n) - \left(a_{n-1}^2 - 2(n-1)\right)}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}}\\
=&\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} n\left(a_n^2 - a_{n-1}^2 - 2\right)\\
=&\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} n\left[\left(a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}\right)^2 - a_{n-1}^2 - 2\right]\\
=&\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2(n-1)}{a_{n-1}^2}\cdot\frac{n}{2(n-1)}\right]\\
=&\frac{1}{2}\left(1\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

再给出一题以作为练习. □

例 1.34. $x_1 = 1, x_{n+1} = \sin x_n$, 求下列极限 *(1)* . $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}x_n(2)$. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(nx_n^2 - 3)}{\ln n}$

例 1.35. $p_k > 0, \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_n}{\sum_{i=1}^n p_i} = 0, \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 证明*:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_1 a_n + p_2 a_{n-1} + \cdots + p_n a_1}{\sum_{i=1}^n p_i} = a$$

证明. $\forall \varepsilon, \exists N$, 使得 $\forall n > N, |a_n - a| < \varepsilon$, $\dfrac{p_n}{\sum_{i=1}^n p_i} < \varepsilon$, $\dfrac{p_{n-k}}{\sum_{i=1}^n p_i} < \dfrac{p_{n-k}}{\sum_{i=1}^{n-k} p_i} < \varepsilon, \forall k < n - N$. 由有界性, 故 $\exists M$, 使得 $|a_n - a| < M$

$$\begin{aligned}
&|\frac{p_1 a_n + p_2 a_{n-1} + \cdots + p_n a_1}{\sum_{i=1}^n p_i} - a| \\
=&|\frac{p_n(a_1 - a) + \cdots + p_1(a_n - a)}{\sum_{i=1}^n p_i}| \\
\leq&|\frac{p_n(a_1 - a) + \cdots + p_{n-N+1}(a_{N+1} - a)}{\sum_{i=1}^n p_i}| + |\frac{p_{n-N}(a_{N+1} - a) + \cdots + p_1(a_n - a)}{\sum_{i=1}^n p_i}|
\end{aligned}$$

□

例 1.36. 对任意自然数 n, 方程 $x + x^n = 1$ 恰好有一个正根 x_n, 进一步证明数列收敛, 并求出极限.

2 函数极限

2.1 反三角函数与双曲函数

$y = \sin x$ 在 R 上不单调, 不存在反函数. 我们取 $y = \sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的反函数, 记为 $y = \arcsin x$. 因此 $f(x) = \sin(\arcsin x), g(x) = \arcsin(\sin x)$, 都不一定等于 x.

反三角函数有如下相互关系:

1. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$
2. $\arcsin(-x) = -\arcsin x$
3. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

正割函数 $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, 余割函数 $\csc x = \frac{1}{\sin x}$, 余切函数 $\cot x = \frac{1}{\tan x}$. 六个三角函数之间有如下关系:

1. $\sin x = \tan x \cdot \cos x$
2. $\cos x = \sin x \cdot \cot x$
3. $\tan x = \sin x \cdot \sec x$
4. $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$
5. $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$
6. $\sec^2 x + \csc^2 x = \sec^2 x \cdot \csc^2 x$
7. $\sec 2x = \frac{1 + \tan^2 x}{1 - \tan^2 x}$
8. $\csc 2x = \frac{1 + \tan^2 x}{2 \tan x}$

双曲正弦函数 $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, 双曲余弦函数 $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, 双曲正切函数 $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. 双曲函数有如下性质:

1. $\sinh(-x) = -\sinh x$

2. $\cosh(-x) = \cosh x$

3. $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

4. $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

5. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

6. $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$

7. $\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1 = 1 + 2\sinh^2 x$

8. $\sinh' x = \cosh x$

9. $\cosh' x = \sinh x$

反双曲正弦函数 $\operatorname{arcsinh}\ x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$,

反双曲余弦函数 $\operatorname{arccosh}\ x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.

2.2 复合函数的极限

定理 2.1. *复合函数的极限:*

设 f 在 x_0 附近,g 在 t_0 附近有定义, 且当 $t \neq t_0$ 时,$g(t) \neq x_0$, 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, $\lim\limits_{t\to t_0} g(t) = x_0$, 则 $\lim\limits_{t\to t_0} f(g(t)) = l$.

定理 2.2. *推广:*

1. *设函数 g 在 t_0 附近有定义. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, $\lim\limits_{t\to t_0} g(t) = +\infty$, 则 $\lim\limits_{t\to t_0} f(g(t)) = l$.*

2. *设函数 f 在 x_0 附近有定义, 且 $\forall t, g(t) \neq x_0$. 若 $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0} = l$, 则 $\lim\limits_{t\to+\infty} f(g(t)) = l$.*

我们深入理解一下这些推广, 以及那个当 $t \neq t_0$ 时,$g(t) \neq x_0$ 条件是怎么来的.

定理 2.3. *设 $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$, $\lim\limits_{y\to A} f(y) = B$ 成立。如果满足以下条件之一 (这三个条件都是充分条件, 但不是必要条件):*

1. *存在点 a 的一个去心邻域 $O_{\delta_0}(a) - \{a\}$, 在其中 $g(x) \neq A$,*

2. $\lim\limits_{y\to A} f(y)=f(A)$,

3. $A=\infty$, 且 $\lim\limits_{y\to A} f(y)$ 有意义,

则成立 $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))=\lim\limits_{y\to A} f(y)=B$.

证明. (1) 对任意 $\epsilon>0$，存在 $\delta_1>0$，使得当 $0<|y-A|<\delta_1$ 时，成立 $|f(y)-B|<\epsilon$。不妨假定已有 $\delta_1\le\delta_0$ 成立。又由条件 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=A$，对上述 δ_1 有 $\eta>0$，使得 $0<|x-a|<\eta$ 时，成立 $|g(x)-A|<\delta_1$。根据条件又有 $0<|g(x)-A|$ 成立。因此成立 $|f(g(x))-B|<\epsilon$。这就是 $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))=B$。

(2) 设 $\lim\limits_{y\to A} f(y)=f(A)=B$。从而知道对每个 $\epsilon>0$，存在 $\delta_1>0$，使得 $|y-A|<\delta_1$ 时，成立 $|f(y)-f(A)|<\epsilon$。又由条件 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=A$，对上述 δ_1 有 $\eta>0$，使得 $0<|x-a|<\eta$ 时，成立 $|g(x)-A|<\delta$，从而就成立 $|f(g(x))-f(A)|<\epsilon$，因此得到 $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))=f(A)=B$。

(3) 只讨论 $\lim\limits_{y\to\infty} f(y)=B$ 为有限数的情况。这时对每个 $\epsilon>0$，存在 $M>0$，使得 $|y|>M$ 时，成立 $|f(y)-B|<\epsilon$。又由条件 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$，对上述 $M>0$ 有 $\eta>0$，使得当 $0<|x-a|<\eta$ 时，成立 $|g(x)|>M$，从而成立 $|f(g(x))-B|<\epsilon$。

这样就得到 $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))=B$。 □

复合函数的极限可以带来很有用的推论.

推论 2.4. 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A>0, \lim\limits_{x\to a} g(x)=B$, 则 $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}=A^B$.

证明. 设已知 $\lim\limits_{x\to a}\ln f(x)=\ln A\ (A>0)$ 和 $\lim\limits_{x\to a} e^x=e^b$, 于是 $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\exp[g(x)\ln f(x)]=\exp\left[\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)\right]=\exp\left[\lim\limits_{x\to a} g(x)\right]\lim\limits_{x\to a}\ln f(x)=A^B$. □

上述结论成立的前提是 f,g 在对应的点都有极限. 事实上, 在以下三种情况下, 这个结论是不一定成立的.

(1) $A=0$, $B=0$; (2) $A=+\infty$, $B=0$; (3) $A=1$, $B=\infty$.

我们习惯把这三种情况称为 0^0, ∞^0 和 1^∞ 型的不定式 (未定式). 除此之外的不定式还有 $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, ∞^0, $0/0$, ∞/∞. 数列都可以转为能应用 Stolz 定理的形式, 函数极限则可能涉及一些后续的工具.

例 2.5. 错误的写法

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{x^p-x}=1\Rightarrow \text{当 } x\to+\infty \text{ 时},x^p\to x^p-x.$$

例 2.6. 证明: $\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x^p})^x=\begin{cases}1, & p>1,\\ e, & p=1,\\ +\infty, & 0<p<1.\end{cases}$

2.3 等价代换

不是很难, 不用动笔, 看不出结果或者没思路再翻书.

习题 2.1. 求函数极限.

1. $\lim_{x\to0}\frac{5x^3+2x-1}{3x^2-2x+1}$
2. $\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3+2x-1}{3x^2-2x+1}$
3. $\lim_{x\to0}(x^2-1)(1+\cos x)$
4. $\lim_{x\to0}\sqrt{\frac{4x^2-3}{x^2+1}}$

习题 2.2. 等价代换

1. $\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{x}$
2. $\lim_{x\to0}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$
3. $\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$
4. $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x^2\cdot\cot 3x}$
5. $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^a x}{x^2}$, a 为整数.

例 2.7. 指出下列做法的错误.

$$\lim_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to0}x\cdot\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=0\cdot1=0$$

解. 等价代换, 注意代换的部分是否满足条件, 如 $\sin x/x=1$, 是 $x\to 0$ 时才满足. □

例 2.8. 指出下列做法的错误, 注意, 这与上面的错误原因不同.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2\sin\frac{1}{x})}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

解. 等价代换 ($\sin x\sim x$) 的成立依赖于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^2\sin\frac{1}{x})}{x^2\sin\frac{1}{x}}=1$, 而这个表达式是不成立的, 他不满足函数收敛的定义. 或者说由 Henie 定理可以看出,x 轴上存在一列函数值无定义的点. 这道题还是有做法的, 用两边夹就好了. □

定理 2.9. *Henie 定理:*

函数极限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ 的充要条件是: 对任意收敛于 a 的数列 $\{x_n\}$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

定理 2.10. 推广:

设 A 有限, 存在极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 的充要条件是: 对每个严格单调增至正无穷大的数列 $\{x_n\}$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

这些推广保证了在更多的条件下, 我们可以进行变量代换, 以及用函数求数列极限.

2.4 数列与函数极限习题

例 2.11. 求和 $\sum\limits_{k=1}^{n}\sin kx$.

证明. 考虑求和：$S=\sum\limits_{k=1}^{n}\sin kx=\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx$.

当 $x=2\pi k$ 时，$S=0$。

当 $x\neq 2\pi k$ 时，$\sin\frac{x}{2}\neq 0$，我们可以两边同时乘以 $\sin\frac{x}{2}$：$\sin\frac{x}{2}\cdot S=\sin\frac{x}{2}\cdot(\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx)$.

右边展开，利用 $\sin\frac{x}{2}\sin nx=\frac{1}{2}\left(\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)$ 进行化简:$\sin\frac{x}{2}\cdot S=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3}{2}x+\cos\frac{3}{2}x-\cos\frac{5}{2}x+\cdots+\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)$.

因此：$\sin\frac{x}{2}\cdot S=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x\right)$.

右边再利用 $\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$，化成关于 sin 的乘积形式：$\sin\frac{x}{2}\cdot S=\frac{1}{2}\left(-2\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{-nx}{2}\right)$.

于是：$\sin\frac{x}{2}\cdot S=\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}$.

最终得到：$S=\frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$. 证明完毕。

类似的，我们也可以证明：$\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx=\frac{\cos\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.

令 $S=\sum_{k=1}^{n}\cos kx$,等式两边还是乘以 $\sin\frac{x}{2}$,利用 $\sin\frac{x}{2}\cos nx=-\frac{1}{2}\left(\sin(n-\frac{1}{2})x-\sin(n+\frac{1}{2})x\right)$ 进行化简可得：$\sin\frac{x}{2}\cdot S=\frac{1}{2}\left(-\sin\frac{x}{2}+\sin(n+\frac{1}{2})x\right)$.

利用 $\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$,得到:$\sin\frac{x}{2}\cdot S=\cos\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}$.

最后，得到：$S=\frac{\cos\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$. □

习题 2.3. *求函数极限.*

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\cdots\sqrt{\cos nx}}{x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin^x x-x^x$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}x-\ln(x+e^x)$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+2}}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\sin x}$.

2.5 o, O

定义 2.12. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是定义在 x_0 的某个去心邻域上的函数。如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$，则称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的 $o(g(x))$，记作 $f(x)=o(g(x))(x\to x_0)$。

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是定义在 x_0 的某个去心邻域上的函数。如果 $\exists M, \frac{f(x)}{g(x)} \leq M$ 在 x_0 的去心邻域上成立，则称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的 $O(g(x))$，记作 $f(x) = O(g(x))(x \to x_0)$。

o, O 仅表示相对的大小关系, 本身不额外表示高阶 (低阶) 无穷大 (小), 老师上课只是给出具体的例子.

$o(f)$ 的含义实际是所有 f 的无穷小量组成的集合, 因此前面的等号实际含义是 $\in$, 如果两边都有 o, O(这种表述很少见), 则等号的含义实际是 $\subset$.

我们试图用阶定量的表示这种无穷小的比较关系, 但是不是所有无穷小都可以用阶来表示. 而且我们仅讲述了整数阶, 而分数阶, 无理数阶有一些争议, 不做讨论.