第 2 次习题课讲义

2024.9.28

1 数列极限

1.1 实数理论

课本上写到, 实数公理化表述为如下的定理：

定理 1.1. *任何两个实数之间一定存在一个有理数。*

这句话暗示了两个信息, 一实数 (集合) 有序, 即实数 (元素) 可比较, 而虚数不是有序的；二实数是稠密的, 即实数之间没有间隙, 而正整数不是稠密的。大家以后看到这种“显然”的命题定理, 可以试一试这样反向拆解.

1.2 极限的定义

定义 1.2. *设 a_n 是给定的数列. 如果有一个实数 a 具有下列性质: 对任意给定的一个正数 ε, 总存在正整数 $N = N(\varepsilon)$, 使得当 $n > N$ 时, 不等式*

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

成立, 那么称实数 a 是数列 a_n 的极限, 记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

此处的定义给出的不等式 $|a_n - a| < \varepsilon$ 是核心, 这个定义可以拆分成这几句来理解:

1. 极限是对于数列而言的, 我们用的说法是设数列 $\{a_n\}$ 有极限 a. 极限是一个具体的数.

2. 极限定义为满足某一性质的数, 这个性质与给定的数列有关. 可以类比实数除法:" 如果一个实数 r 满足: 对给定的两个实数 p 和 $q(q \neq 0)$, 若存在一个实数, 使得 $p = qr$, 那么称实数 r 是 p 除以 q 的商, 记为 $r = \frac{p}{q}$." 商由等式定义, 极限由不等式定义.

3. 不严谨的说,$\forall \varepsilon > 0$ 暗示了: 随着 ε 的减小, 要取的 N 也会变大;

4. 证明 a 为数列 $\{a_n\}$ 的极限时, 意在构造 N, 说的定义法求极限, 本质都是构造 $N = N(\varepsilon)$.$N(\varepsilon)$ 是 ε 的函数, 但其实不一定显含 ε, 证明 $\frac{1}{n}$ 收敛时可以将 N 写成 $N = N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$; 证明极限的线性性质的时候不是显含的.

5. 找到 N 之后, 怎么判断 N 是否满足要求呢, 就是看不等式 $|a_n - a| < \varepsilon$ 是否成立, 这里右侧不要求一定是 ε, 只要当 ε 趋近 0 的时候也趋近 0 即可.

6. 已知收敛的话, 则可以将定义作为条件.

例 1.3. *证明极限的线性性.*

上面的解释的第 6,4,5 条, 可以辅助理解下面的证明.

解. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 s.t. \forall n > N_1, |a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{|c_1| + |c_2|}$;

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_2 s.t. \forall n > N_2, |b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{|c_1| + |c_2|}$;

设 $N = max\{N_1, N_2\}$, 则 $\forall n > N$, 有 $n > N_1, n > N_2$, 则有 $|c_1 a_n + c_2 b_n - (c_1 a + c_2 b)| \leq |c_1||a_n - a| + |c_2||b_n - b| < \varepsilon$ □

但下面这么写也可以, 看你觉得哪个好理解写哪个.

解. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 s.t. \forall n > N_1, |a_n - a| < \varepsilon$;

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_2 s.t. \forall n > N_2, |b_n - b| < \varepsilon$;

设 $N = max\{N_1, N_2\}$, 则 $\forall n > N$, 有 $n > N_1, n > N_2$, 则有 $|c_1 a_n + c_2 b_n - (c_1 a + c_2 b)| \leq |c_1||a_n - a| + |c_2||b_n - b| < |c_1|\varepsilon + |c_2|\varepsilon$ □

之后的所有" 对于任意的..., 存在..., 使得..." 句式中存在... 的参数 (在这里是 N) 都依赖前面的参数 (在这里是 ε), 并且基本都会将 $N(\varepsilon)$ 简写为 N.

若干个相邻的任意可以合并成一个任意, 若干个相邻的存在可以合并成一个存在. 当... 也表示任意.

例 1.4. *请考虑以下语句的含义*

1. *对于任意的 ε, 存在 b, 使得 $|a-b|<\varepsilon$.*
2. *存在 b, 对于任意的 ε, 使得 $|a-b|<\varepsilon$.*

例 1.5. *请考虑以下对极限的定义, 分别表示什么含义, 是否有良定性 (即是否有唯一性)*

1. *对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得当 $n>N$ 时, 有 $|a_n-a|<\varepsilon$.*
2. *对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 存在 $n>N$, 有 $|a_n-a|<\varepsilon$ 成立.*
3. *存在 $N\in\mathbb{N}$, 对于任意的 $\varepsilon>0$, 使得当 $n>N$ 时, 有 $|a_n-a|<\varepsilon$.*
4. *对于任意的 $N\in\mathbb{N}$, 存在 $\varepsilon>0$, 当 $n>N$ 时, 有 $|a_n-a|<\varepsilon$.*
5. *对于任意的 $N\in\mathbb{N}$, 存在 $\varepsilon>0$, 存在 $n>N$, 有 $|a_n-a|<\varepsilon$.*
6. *对于任意的 $N\in\mathbb{N}$, 任意 $\varepsilon>0$, 存在 $n>N$, 有 $|a_n-a|<\varepsilon$.*

N 的存在性一般由构造来得出

例 1.6. *证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}=1$*

$\forall\varepsilon>0$, 欲求 N, 使得 $|\sqrt[n]{n+1}-1|<\varepsilon$, 记 $a_n=\sqrt[n]{n+1}-1$, 则

$$1+n=(1+\alpha)^n=1+n\alpha+\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2+\cdots+\alpha^n\geq\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2$$

因此

$$0<\alpha<\sqrt{\frac{2(n+1)}{n(n-1)}}\leq\sqrt{\frac{2}{n-1}}<\varepsilon$$

对每一个不等号组成的不等式组求解, 就可以得到 n 的范围了, 即得 $N=max\{2,\frac{4}{\varepsilon^2}+1\}+1$

1.3 极限运算

我们常用的加减乘除是一个二元运算, 运算结果是一个数。而数列极限是一种新的运算, 处理对象为数列, 处理结果为一个新的数.

加法有一条很显然的性质：两个正数相加仍为一个正数, 这一条性质可以叫做加法对正数封闭, 也可以说 $\mathbb{R}$ （某个集合）是保持对加法封闭的. 大家可以自行验证：$\mathbb{Z}$,$\mathbb{R}$ 对极限不封闭.

很多运算的性质在无穷的情况下是不成立的,

例 1.7. *请给出例子或计算*

1. *无穷数列极限不为无穷大*

2. *举一例有理数列的极限为无理数*

2. *正项级数极限不为正数*

3. *无理数对有限幂次运算不封闭 (考虑* $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$*)*

4. *求和*

$$1-1+1-1+1-1+\cdots$$

$$1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots$$

5. a *为正实数, 数列* $a, a^a, \cdots, a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ *可以收敛也可以不收敛*

6. *证明整数对极限运算封闭*

解. 3. 这里为了展示构造性证明, 实际上有更简单的例子.

4. 前者不能求和, 后者可以求和. 要想清楚, 这是两个数列 (把前 n 项的和看成数列), 你可以由数列极限的唯一性轻松反证.

这个例子说明了结合律在无穷的情况下不成立, 你可以自己找一个使得交换律在无穷情况下不成立的例子.

5. 可以自行求一下 a 取什么值的时候, 这个数列恰好收敛. 这一问还说明了一个问题: 有限的幂次和无限的幂次是两种不一样的运算. 事实上, 有限和无限次的基本算数运算大都是不一样的.(取集合运算也不一样)

□

有一个与对极限封闭很相似的说法, 称呼为保极限. 但对极限封闭与否是一个集合的性质, 而保极限与否是一个运算的性质, 准确的说是映射的性质.

如果一个映射 f 与一个极限运算可以任意交换顺序, 那么说这个映射 f 是保极限的. 课本定理 1.5 的意义便是在于证明了极限是保 (有限的) 四则运算的.

定理 1.8. *课本定理 1.5*

设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是两个收敛数列, 则通过四则运算形成的新的数列 $\{a_n \pm b_n\}$, $\{a_nb_n\}$, $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$（当 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$ 时）都收敛, 且有

1° $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

2° $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, *特别, 有* $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, *其中 c 是一个常数.*

3° $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, *其中* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

但是极限与极限, 极限与函数, 极限与运算大都是不可交换的, 如课本例 1.2.6, 如下的做法是完全错误的:

例 1.9. *请说明错误在哪里*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} + \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2} + \cdots + \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2} = 0$$

解. 第一步将分子拆开是错误的, 对内有限, 对外无限, 无限加法不可交换.

请注意 $0\cdot\infty$ 的意义, 在我们目前学的空间内 ∞ 并不是一个数, 这个表达式实际上没有意义. 在一些特定场合, 他实际上是 $0+0+\cdots+0$ 的简写 (当然也可能有其他的形式), 也就是 0. 这个简写不够严谨, 实际上也交换了极限与加法. □

例 1.10. *请说明错误在哪里* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{1/n} = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^{1/n}$

解. 我们对整一个数列做极限运算, 而不是对数列中的每一个数做极限运算. 这个式子的意义是 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{1/n}$ 是一个数, 而 $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^{1/n}$ 是一个数列. 前者与 n 无关, 后者与 n 有关. □

1.4 极限

例 1.11. *判断正误:*

1. *若 $\{a_n\}$ 收敛, 则有* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$
2. *正无穷大数列是否一定单调增加? 无界数列是否一定是无穷大量?*
3. *收敛数列是否一定是单调数列? 无穷小量是否一定是单调数列?*

解. 1. $(\frac{1}{2})^n$

2. 无穷大和无穷小都不是一个具体的数, 拿他当具体的数进行谈论没有意义 (不符合常规的运算 $1+\infty=\infty, 2\cdot\infty=\infty$), 只是一个趋势.

□

例 1.12. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$

解. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdots\frac{n}{n}$ □

例 1.13. 请证明*:*

1. 设 $b>0, \lim\limits_{n\to\infty}=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}b^{a_n}=b^a$

2. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}=a$, 则 $\sin a_n=\sin a$

例 1.14. 证明单调数列收敛的充要条件是存在收敛子列

1.5 Cauchy 列

Cauchy 收敛定理的优点在于不需要事先知道收敛值就可以判断是否收敛; 使用 Cauchy 收敛定理的否命题判定不收敛也可能比定义判定方便.

定理 1.15. *Cauchy* 收敛定理的否命题判定不收敛*:*

对任意正整数 n, 存在 $p>n$, 使得 $|a_p-a_n|>\varepsilon_0$, 其中 ε_0 为给定的常数, 则数列 $\{a_n\}$ 不收敛.

例 1.16. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 不存在

证明. 对于任意 n, 存在 $p_1=[\frac{n}{\pi}]\pi+\frac{3}{2}\pi, p_2=[\frac{n}{\pi}]\pi+\frac{5}{2}\pi>[\frac{n}{\pi}+1]\pi>n$, 使得 $|a_{p_1}-a_n|, |a_{p_2}-a_n|>\frac{1}{2}$ 二者至少有其一成立。

□

注记 1.17. 其实我们不满足于这个结果, 在深入的学习中会发现这个数列的极限点几乎可以取遍 $[-1,1]$, 或者对于任 $[-1,1]$ 中的点, 都可以找到一个子列收敛到这个点. 这个问题的构造从知识结构上现在就可以解决.

1.6 闭区间套定理与列紧性

定理 1.18. 闭区间套定理:

若 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一列闭区间, 且满足 $a_{n+1} \le a_n \le b_n \le b_{n+1}$, 则存在唯一的实数 ξ, 使得 $\xi \in [a_n, b_n], n = 1, 2, \cdots$

分析中有两个比较重要的概念, 一个是极限, 另一个是拓扑空间. 给出一些他们的形象化理解 (比如高维空间). 闭区间套定理的意义在于他的拓展已经脱离了实数数列的范畴, 而是在拓扑空间中的一个定理. 闭区间套定理常用于证明相对抽象的问题, 不太直接用于求数列的极限.

例 1.19. 证明: 实数集 $\mathbb{R}$ 不可列.

可列定义为可以一一对应到自然数集 $\mathbb{N}$ 的集合, 或者等价的说, 可以写成一个数列.

例 1.20. ”开区间套定理”的反例

例 1.21. 函数 f 在 $[a, b]$ 上局部有界, 则 f 在 $[a, b]$ 上有界. 局部有界是指对于任意 $x \in [a, b]$, 存在 $\delta > 0$, 使得 f 在 $(x - \delta, x + \delta)$ 上有界.

定义 1.22. 有界数列必有收敛子列.

我们在前面提到我们认为 $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{Q}$ 经过取极限运算得到的. 因此一个典型的列进性不存在的空间是 $\mathbb{Q}$, 其中有界数列不一定有收敛子列.

列紧性也不适合用于求极限, 因为列紧性只保证了有收敛子列, 但不保证极限存在. 不过我们可以用以下性质来刻画数列.

命题 1.23. 数列 $\{a_n\}$ 的某个子列收敛于 a 的充要条件在 a 的任意小邻域内有无穷多项.

用两个实数连续性的等价命题作为工具, 能证明许多命题.

命题 1.24. 函数 f 对区间 (a, b) 中的任一点 ξ, 存在 $\delta > 0$, 使得 $\forall x \in (\xi - \delta, \xi + \delta), x > \xi$ 有 $f(x) > f(\xi)$, $x < \xi$ 有 $f(x) < f(\xi)$, 则 f 在 (a, b) 上严格增.

1.7 子列

例 1.25. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = a, \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = a$

命题 1.26. *数列有界的充要条件为他的每个子列有收敛子列.*

命题 1.27. *数列收敛的充分必要条件是存在一个数 a, 使数列的每个子列有收敛于 a 的子列.*

1.8 总结

1. 理解数列极限的 $\epsilon - N$ 定义: 会用定义求证数列极限. 基本方法是解 $|a_n - a| < \varepsilon$.

2. 掌握数列极限的性质: 有界性, 保号性, 不等式性, 数列极限与子列极限的关系.

3. 掌握求数列极限的方法: 定义, 夹逼, 四则运算; 单调有界判断收敛, 再递推两边取极限; 用函数极限求数列极限, 若干重要极限,Stolz.

1.9 经典错误

例 1.28. *概念判断, 充分和必要分别判断对错.*

1. 若 $a_n > 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \iff \lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a \iff \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.
4. a_n 中任意两个子列 $\{a_{k_n}\}$ 和 $\{a_{l_n}\}$ 均有 $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{k_n} - a_{l_n}) = 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, a \in \mathbb{R}$.
5. $a_n > 0, \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = l > 1 \implies \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
6. 若 $a_n \neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \neq 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.
7. 无界数列一定是无穷大量。
8. 非负数列极限是非负数，正项数列极限是正数。
9. 若数列 $\{a_n\}$ 是单调数列，则 $\{a_n\}$ 收敛 $\iff$ $\{a_n\}$ 有收敛子列。
10. 若对任意 $n, p \in \mathbb{N}^*$, 均有 $|a_{n+p} - a_n| < \dfrac{p}{n^2}$，则数列 $\{a_n\}$ 收敛。

11. 若数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n = 0$, 则必有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$。

12. 判断数列 $\{a_n + b_n\},\{a_n \cdot b_n\}$ 的发散性：

    (a) 若数列 $\{a_n\}$ 收敛，数列 $\{b_n\}$ 发散；

    (b) 若数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 皆发散。

13. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l, \lim\limits_{y\to y_0} g(y) = x_0 \implies \lim\limits_{y\to y_0} f(g(y)) = l.$

例 1.29. 请指出以下做法的错误.

已知 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = a.$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_2}{a_1}a_1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a\cdot a\cdots a\cdot a_1} = a$$

1.10 数列极限习题

这部分自己随便挑着算一算.

例 1.30. 综合计算

1. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - x_{n-2}) = 0$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{n} = 0$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{n} = ab$

3. $x_1 = 1, x_n = 1 + \dfrac{1}{1+x_{n-1}}$; 证明 $\{x_n\}$ 收敛并求极限.

4. $x_1 > 0, a > 0, x_{n+1} = \dfrac{1}{4}(3x_n + \dfrac{a}{x_n^3})$; 证明 x_n 收敛并求极限.

5. $a_n = \dfrac{b_{n-1}+c_{n-1}}{2}, b_n = \dfrac{a_{n-1}+c_{n-1}}{2}, c_n = \dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$; 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$

6. 证明: $e(\dfrac{n}{e})^n < n! < en(\dfrac{n}{e})^n$.

例 1.31. 阶的渐进估计.

设 $a = 1, a_n = a_{n-1} + \dfrac{1}{a_{n-1}}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{\sqrt{2n}}, \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{2n}(a_n - \sqrt{2n})}{\ln n}$.

再给出一题以作为练习.

习题 1.1. $x_1=1, x_{n+1}=\sin x_n$, 求下列极限 *(1)* . $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}x_n$(2). $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(nx_n^2-3)}{\ln n}$

例 1.32. $p_k>0, \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_n}{\sum_{i=1}^n p_i}=0, \lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1a_n+p_2a_{n-1}+\cdots+p_na_1}{\sum_{i=1}^n p_i}=a$$

例 1.33. 对任意自然数 n, 方程 $x+x^n=1$ 恰好有一个正根 x_n, 进一步证明数列收敛, 并求出极限.

2 函数极限

2.1 反三角函数与双曲函数

$y=\sin x$ 在 R 上不单调, 不存在反函数. 我们取 $y=\sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上的反函数, 记为 $y=\arcsin x$. 因此 $f(x)=\sin(\arcsin x), g(x)=\arcsin(\sin x)$, 都不一定等于 x.

反三角函数有如下相互关系:

1. $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$
2. $\arcsin(-x)=-\arcsin x$
3. $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$

正割函数 $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$, 余割函数 $\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$, 余切函数 $\cot x=\dfrac{1}{\tan x}$. 六个三角函数之间有如下关系:

1. $\sin x=\tan x\cdot\cos x$
2. $\cos x=\sin x\cdot\cot x$
3. $\tan x=\sin x\cdot\sec x$
4. $1+\tan^2 x=\sec^2 x$
5. $1+\cot^2 x=\csc^2 x$
6. $\sec^2 x+\csc^2 x=\sec^2 x\cdot\csc^2 x$

7. $\sec 2x = \dfrac{1+\tan^2 x}{1-\tan^2 x}$

8. $\csc 2x = \dfrac{1+\tan^2 x}{2\tan x}$

双曲正弦函数 $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, 双曲余弦函数 $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, 双曲正切函数 $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. 双曲函数有如下性质:

1. $\sinh(-x) = -\sinh x$

2. $\cosh(-x) = \cosh x$

3. $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

4. $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

5. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

6. $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$

7. $\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1 = 1 + 2\sinh^2 x$

8. $\sinh' x = \cosh x$

9. $\cosh' x = \sinh x$

反双曲正弦函数 $\operatorname{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$,

反双曲余弦函数 $\operatorname{arccosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.

2.2 复合函数的极限

定理 2.1. *复合函数的极限:*

设 f 在 x_0 附近,g 在 t_0 附近有定义, 且当 $t \neq t_0$ 时,$g(t) \neq x_0$, 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, $\lim\limits_{t\to t_0} g(t) = x_0$, 则 $\lim\limits_{t\to t_0} f(g(t)) = l$.

定理 2.2. *推广:*

1. *设函数 g 在 t_0 附近有定义. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, $\lim\limits_{t\to t_0} g(t) = +\infty$, 则 $\lim\limits_{t\to t_0} f(g(t)) = l$.*

2. 设函数 f 在 x_0 附近有定义, 且 $\forall t, g(t) \neq x_0$. 若 $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0} = l$, 则 $\lim\limits_{t\to+\infty} f(g(t)) = l$.

我们深入理解一下这些推广, 以及那个当 $t \neq t_0$ 时,$g(t) \neq x_0$ 条件是怎么来的.

定理 2.3. *设 $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$, $\lim\limits_{y\to A} f(y) = B$ 成立。如果满足以下条件之一 (这三个条件都是充分条件, 但不是必要条件):*

1. *存在点 a 的一个去心邻域 $O_{\delta_0}(a) - \{a\}$，在其中 $g(x) \neq A$，*
2. *$\lim\limits_{y\to A} f(y) = f(A)$,*
3. *$A = \infty$, 且 $\lim\limits_{y\to A} f(y)$ 有意义,*

则成立 $\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = \lim\limits_{y\to A} f(y) = B$.

复合函数的极限可以带来很有用的推论.

推论 2.4. *若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A > 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, 则 $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = A^B$.*

上述结论成立的前提是 f, g 在对应的点都有极限. 事实上, 在以下三种情况下, 这个结论是不一定成立的.

(1) $A = 0$, $B = 0$; (2) $A = +\infty$, $B = 0$; (3) $A = 1$, $B = \infty$.

我们习惯把这三种情况称为 0^0, ∞^0 和 1^∞ 型的不定式 (未定式). 除此之外的不定式还有 $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, ∞^0, $0/0$, ∞/∞. 数列都可以转为能应用 Stolz 定理的形式, 函数极限则可能涉及一些后续的工具.

例 2.5. *错误的写法*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^p}{x^p - x} = 1 \Rightarrow \text{当 } x \to +\infty \text{ 时}, x^p \to x^p - x.$$

例 2.6. *证明:* $\lim\limits_{x\to+\infty} (1 + \frac{1}{x^p})^x = \begin{cases} 1, & p > 1, \\ e, & p = 1, \\ +\infty, & 0 < p < 1. \end{cases}$

2.3 等价代换

不是很难, 不用动笔, 看不出结果或者没思路再翻书.

习题 2.1. 求函数极限.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^3+2x-1}{3x^2-2x+1}$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{5x^3+2x-1}{3x^2-2x+1}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-1)(1+\cos x)$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{4x^2-3}{x^2+1}}$

习题 2.2. 等价代换

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x^2\cdot\cot 3x}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^a x}{x^2}$, a 为整数.

例 2.7. 指出下列做法的错误.

$$\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}x\cdot\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=0\cdot 1=0$$

例 2.8. 指出下列做法的错误, 注意, 这与上面的错误原因不同.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2\sin\frac{1}{x})}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

定理 2.9. *Henie* 定理:

函数极限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ 的充要条件是: 对任意收敛于 a 的数列 $\{x_n\}$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

定理 2.10. 推广:

设 A 有限, 存在极限 $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=A$ 的充要条件是: 对每个严格单调增至正无穷大的数列 $\{x_n\}$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

这些推广保证了在更多的条件下, 我们可以进行变量代换, 以及用函数求数列极限.

2.4 数列与函数极限习题

例 2.11. 求和 $\sum_{k=1}^{n} \sin kx$.

习题 2.3. 求函数极限.

1. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\cdots\sqrt{\cos nx}}{x^2}$
2. $\lim_{x\to 0^+} \sin^x x - x^x$
3. $\lim_{x\to +\infty} x - \ln(x+e^x)$
4. $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+2}}$.
5. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\sin x}$.

2.5 o, O

定义 2.12. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是定义在 x_0 的某个去心邻域上的函数。如果 $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$，则称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的 $o(g(x))$，记作 $f(x) = o(g(x))(x \to x_0)$。

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是定义在 x_0 的某个去心邻域上的函数。如果 $\exists M, \frac{f(x)}{g(x)} \le M$ 在 x_0 的去心邻域上成立，则称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的 $O(g(x))$，记作 $f(x) = O(g(x))(x \to x_0)$。