# 第29讲：定积分习题课(一)

(一) 证明下列命题.

(1). 设 $f\in C[a,b]$，$x=\varphi(t)\in C^1[\alpha,\beta]$，且 $\begin{cases}\varphi(\alpha)=a\\ \varphi(\beta)=b\end{cases}$，$\varphi(t)\in[a,b]$.

证明：$\displaystyle\int_a^b f(x)dx \xlongequal{x=\varphi(t)} \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt$ (★1)

(2) 设 $u(x),v(x)\in C^1[a,b]$. 则有定积分分部积分公式：

$$\int_a^b u(x)d(v(x))=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)d(u(x)) \quad (★2).$$

闵可夫斯基

(3). 设 $f,g\in C[a,b]$. 则有 Minkowski 不等式：

$$\left(\int_a^b (f(x)+g(x))^2dx\right)^{\frac12}\le\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac12}+\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac12}. \quad (★3)$$

等号成立，当且仅当 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上线性相关：$f(x)=\lambda g(x)$，$\forall x\in[a,b]$.

(4). 若 $f\in C[-a,a]$ 且 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_{-a}^a f(x)dx=0$，$\forall a\in R^+$.

(5). 若 $f\in C[-a,a]$，且 $f(x)$ 为偶函数，则 $\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$，$\forall a\in R^+$.

上述(★1)揭示了定积分的换元积分法，包含"换元必换限，换限要假设"。(4),(5)揭示了定积分的奇偶对称性。

(6). 设 $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$ 且 $f(x)$ 以 $T$ $(T>0)$ 为周期，则：

$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx, \quad \forall a \in R.$ (公式4).

即连续的周期函数 $f(x)$，在任何一个周期上的积分都相等。例如，当 $f(x)$ 以 $2\pi$ 为周期且在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续时，

$f(x)\sin x$、$f(x)\sin nx$、$f(x)\cos nx$ $(n \in N^*)$ 均以 $2\pi$ 为周期且是 $C$ 函数，此时，必有：$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} f(x)\sin nx dx$；

$\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \int_{-2\pi}^{0} f(x)\cos nx dx = \cdots$

(7). 设 $f(x) \in C[a,b]$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且不变号，则 $\exists \xi \in [a,b]$，

使 $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$ (公式5)

当 $g(x) \equiv 1$ 时，(公式5) 变为：$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$，$\xi \in [a,b]$.

因此，常称(公式5)为推广的积分中值定理。

(8). 设 $f(x) \in C[a,b]$ 且 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒正，$F(x) \triangleq \int_a^x f(t)dt + \int_b^x \frac{dt}{f(t)}$，

$x \in [a,b]$. 证明：方程 $F(x)=0$ 在 $(a,b)$ 中有唯一实根。

(9). 设 $f(x)=\begin{cases}-1 & -1\le x<0\\ 0 & x=0\\ +1 & 0<x\le 1\end{cases}$，$\Phi(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt$，$x\in[-1,+1]$.

讨论 $\Phi(x)$ 在 $[-1,+1]$ 中的连续性与可微性。

(10). 证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=\begin{cases}\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\times\frac{\pi}{2}, & n=2m, m\in N^*\\ \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}\times 1, & n=2m+1, m\in N.\end{cases}$

(11). 求极限：(1). $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b e^{-nx^2}dx$，$n\in N^*$，$0<a<b$.　(2). $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+a}\frac{\sin x}{x}dx$，$n\in N^*$. $(a>0)$.

(12). $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^4}$，计算该积分。

证(1)：设 $F'(x)=f(x)$，$x\in[a,b]$，则 (*) 左边 $=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$.

(*) 右边 $=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))d\varphi(t)=\int_\alpha^\beta dF(\varphi(t))=F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))$

$=F(b)-F(a)=$ 左边. 故 (*) 成立。

注：在不定积分的换元积分中，要求 $x=\varphi(t)\in C^1$ 且 $\varphi'(t)\neq 0$，而在定积分的换元积分法中，不必要求 $\varphi'(t)\neq 0$，只要 $\varphi(t)\in C^1[\alpha,\beta]$.

证(2)：$\because d(u(x)\cdot v(x))=v(x)du(x)+u(x)dv(x)$. 两边同在 $[a,b]$ 上积分：

$\int_a^b d(u(x)v(x))=\int_a^b v(x)du(x)+\int_a^b u(x)dv(x)$ 即 $u(x)v(x)\Big|_a^b=\int_a^b v(x)du(x)+\int_a^b u(x)dv(x)$

即 $\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)$.

证(3)：∵ $f, g \in C[a,b]$. ∴ 有Cauchy不等式：

$$\left(\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b g^2(x)dx \int_a^b f^2(x)dx \Leftrightarrow \left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\Rightarrow \quad 2\int_a^b f(x)g(x)dx \le 2\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le 2\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

上式两边同时加上：$\int_a^b f^2(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx$，则

$$\int_a^b f^2(x)dx + 2\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx \le \int_a^b f^2(x)dx + 2\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} + \int_a^b g^2(x)dx$$

即 $\int_a^b (f(x)+g(x))^2 dx \le \left(\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2$

即 $\left(\int_a^b (f(x)+g(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

离散的Minkowski不等式为：

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Minkowski不等式中的等号成立，即Cauchy不等式中的等号成立.

当且仅当∃常数λ，使 $f(x) \equiv \lambda g(x)$, $\forall x \in [a,b]$. 或 $b_i = \lambda a_i$, $i=1,2,\cdots n$.

证(4)：∵ $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$，且 $\int_{-a}^0 f(x)dx \xlongequal[dx=-dt]{\text{令}x=-t} \int_a^0 f(-t)(-dt)$

$=\int_0^a f(-t)dt \xlongequal{f(-t)=-f(t)} \int_0^a (-f(t))dt = -\int_0^a f(x)dx$，$\therefore \int_{-a}^a f(x)dx=0$.

证(5)：$\because \int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$，而 $\int_{-a}^0 f(x)dx \xlongequal[\text{则}dx=-dt]{\text{令}x=-t}$

$\int_a^0 f(-t)(-dt) = \int_0^a f(-t)dt \xlongequal{f(-t)=f(t)} \int_0^a f(t)dt = \int_0^a f(x)dx$，

$\therefore \int_{-a}^a f(x)dx \xlongequal[\text{的偶函数}]{f\text{是}[-a,a]\text{上}} 2\int_0^a f(x)dx$.

证(6)：$\because \int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{T+a} f(x)dx$，且

$\int_T^{T+a} f(x)dx \xlongequal[\text{则}dx=du]{\text{令}x=T+u} \int_0^a f(T+u)du = \int_0^a f(u)du = \int_0^a f(x)dx = -\int_a^0 f(x)dx$.

$\therefore \int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$. $\forall a\in R$

证(7)：$\because g(x)$ 在$[a,b]$上可积且不变号，不妨设 $g(x)\geq 0$，$\forall x\in[a,b]$，

由定积分的保号性有：$\int_a^b g(x)dx \geq 0$；再由 $f\in C[a,b]$，知 $f(x)$

在$[a,b]$上有最小值$m$，最大值$M$，即 $m\leq f(x)\leq M$，$\forall x\in[a,b]$ $\Rightarrow$

$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \Rightarrow \int_a^b mg(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \int_a^b Mg(x)dx$.

$\Rightarrow m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx$. (*)

1°) 若 $\int_a^b g(x)dx=0$，则从(*)知：$\int_a^b f(x)g(x)dx=0$

此时，对 $\forall \xi\in[a,b]$，都有 $\int_a^b f(x)g(x)dx=0=f(\xi)\int_a^b g(x)dx=0$ 成立.

(2) 若 $\int_a^b g(x)dx>0$，则从 (*) 有：

$$m\le \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}\le M.$$

依 C 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的介值性定理，$\exists \xi\in[a,b]$，使：

$$f(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}\Leftrightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

证⑧：(1) 利用变上限定积分的性质（微积分基本定理），有

$$\frac{dF(x)}{dx}=\left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x+\left(\int_b^x \frac{1}{f(t)}dt\right)'_x=f(x)+\frac{1}{f(x)}\ge 2>0,\ \forall x\in(a,b)$$

因此，$F(x)$ 在 $(a,b)$ 中严增，从而，方程 $F(x)=0$ 在 $(a,b)$ 中

至多有一个实根；

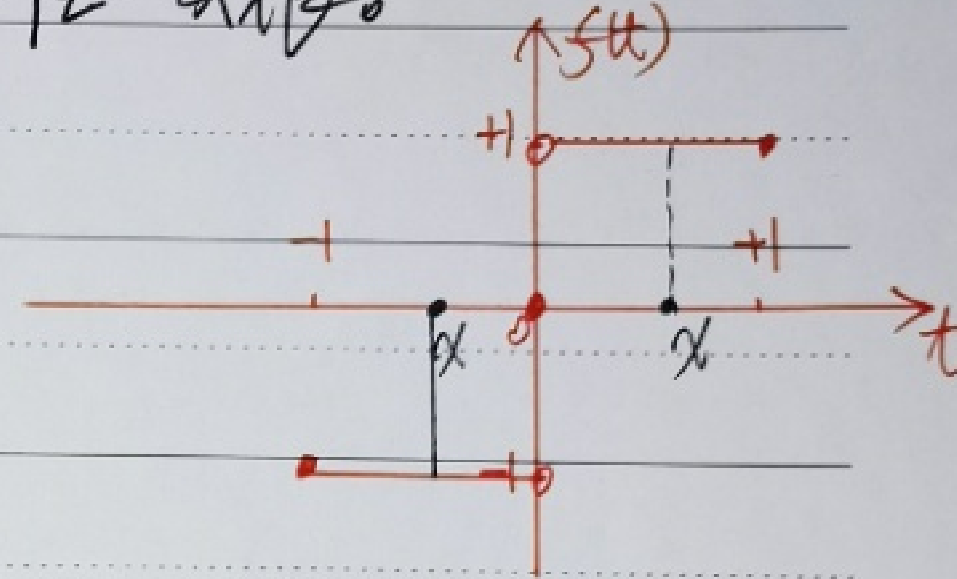
(2) 依 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 中可微知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 中连续，且

$$\begin{cases} F(a)=\int_a^a f(t)dt+\int_b^a \frac{1}{f(t)}dt=0-\int_a^b \frac{1}{f(t)}dt=-\int_a^b \frac{1}{f(t)}dt<0. \\ F(b)=\int_a^b f(t)dt+\int_b^b \frac{1}{f(t)}dt=\int_a^b f(t)dt>0 \end{cases}$$

故方程 $F(x)=0$ 在 $(a,b)$ 中

至少有一个实根。综上(i)，(ii)知：

方程 $F(x)=0$ 在 $(a,b)$ 中恰好有唯一实根。




解(9)：1° 当 $-1\le x<0$ 时，

$\Phi(x)=\int_{-1}^{x}(-1)dt=-(x+1)$，

2° 当 $x=0$ 时，$\Phi(x)=\int_{-1}^{0}(-1)dx=-1$，

3° 当 $0<x\le 1$ 时，$\Phi(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt=\int_{-1}^{0}(-1)dt+\int_{0}^{x}(+1)dt=-1+x$

$$\therefore \Phi(x)=\begin{cases}-(x+1), & -1\le x<0\\ -1, & x=0\\ -1+x, & 0<x\le 1\end{cases}$$

$\Phi(x)$ 在 $[-1,0)$ 及 $(0,+1]$ 中 C 且

$\Phi(0-0)=-1=\Phi(0)=\Phi(0+0)$

$\therefore \Phi(x)$ 在 $x=0$ 处也 C.

即 $\Phi(x)$ 在 $[-1,1]$ 上处处连续.

(ii) 若 $\Phi(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则 $\Phi(x)$ 在 $[-1,1]$ 中也可导，但是

$$\Phi'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\Phi(x)-\Phi(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-(x+1)-(-1)}{x}=\lim_{x\to 0}(-1)=-1;$$

$$\Phi'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\Phi(x)-\Phi(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(-1+x)-(-1)}{x}=\lim_{x\to 0^+}(+1)=+1\ne -1=\Phi'_-(0)$$

$\therefore \Phi(x)$ 在 $[-1,0)$ 及 $(0,1]$ 中均可导，但在 $x=0$ 处不可导。

证(1)：设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$，$n\in N^*$，令 $x=\frac{\pi}{2}-t$，则 $dx=-dt$ 且

$$I_n=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx.$$

(1°) 当 $n=2m$，$m\in N^*$ 时.

$$I_{2m}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2m}x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2m-1}x\,d\sin x=\sin x\cos^{2m-1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,d(\cos^{2m-1}x)$$

$$=0+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,(2m-1)\cos^{2m-2}x\,dx=(2m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)\cos^{2m-2}x\,dx$$

$$=(2m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2m-2}x\,dx-(2m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2m}x\,dx=(2m-1)I_{2m-2}-(2m-1)I_{2m}$$

$\Rightarrow I_{2m}=\frac{2m-1}{2m}I_{2m-2}$，而 $I_{2m-2}=\frac{2m-3}{2m-2}I_{2m-4}$，$I_{2m-4}=\frac{2m-5}{2m-4}I_{2m-6}$，

$\cdots\Rightarrow I_{2m}=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\frac{2m-5}{2m-4}\cdots\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\cdot I_2$，而

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}.$$

故 $I_{2m}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2m}x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x\,dx=\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\times\frac{\pi}{2}$，$\forall m\in N^*$.

(2°) 当 $n=2m+1$ 时. 同理得 $I_{2m+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2m+1}x\,dx=\frac{2m}{2m+1}I_{2m-1}=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot$

$I_{2m-3}=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\frac{2m-4}{2m-3}\cdots\times\frac{6}{7}\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\cdot I_1$，而 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=1$

故 $I_{2m+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2m+1}x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+1}x\,dx=\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}\times 1$，$\forall m\in N$.

细(11)/(10) 设 $f(x)=e^{-nx^2}$，$g(x)\equiv1$，依积分中值th，$\exists\xi\in(a,b)$，

使 $\int_a^b e^{-nx^2}dx=e^{-n\xi^2}(b-a)=\frac{b-a}{e^{n\xi^2}}$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b e^{-nx^2}dx=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{e^{n\xi^2}}=0$.

(11)/(20) 令 $f(x)=\sin x$，$g(x)=\frac{1}{x}$，$x\in[n,n+a]$，则 $f,g\in C[n,n+a]$.

且 $g$ 在 $[n,n+a]$ 上不变号. $\therefore\int_n^{n+a}\frac{\sin x}{x}dx=\sin\xi\int_n^{n+a}\frac{dx}{x}=\sin\xi\ln\frac{n+a}{n}$

$\xi\in(n,n+a)\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+a}\frac{\sin x}{x}dx=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\xi\ln(1+\frac{a}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{n}\sin\xi=0$.

细(12). 有人用：$\int_{-1}^{1}x^{-4}dx=\frac{x^{-3}}{-3}\Big|_{-1}^{1}=-\frac{1}{3}(1-(-1))=\frac{-2}{3}$，即用

Newton-Leibniz公式解此题. 结果是错的！因非负函数 $\frac{1}{x^4}$

的积分应是非负数，不可能是负数！

$\because f(x)=x^{-4}=\frac{1}{x^4}$ 在 $[-1,1]$ 上无界，$\therefore\int_{-1}^{1}x^{-4}dx$ 不是普通的Riemann积分，

而是反常积分中的瑕积分，其中，$x=0$是瑕点。(内容见§5.4.2)

E)作业：EX5.1

11；12；19；21；22/(1)，(3)，(5)，(7)，(11)，(12)；23.

(第30讲：定积分的几何应用举例)