第28讲：微积分基本定理及其应用

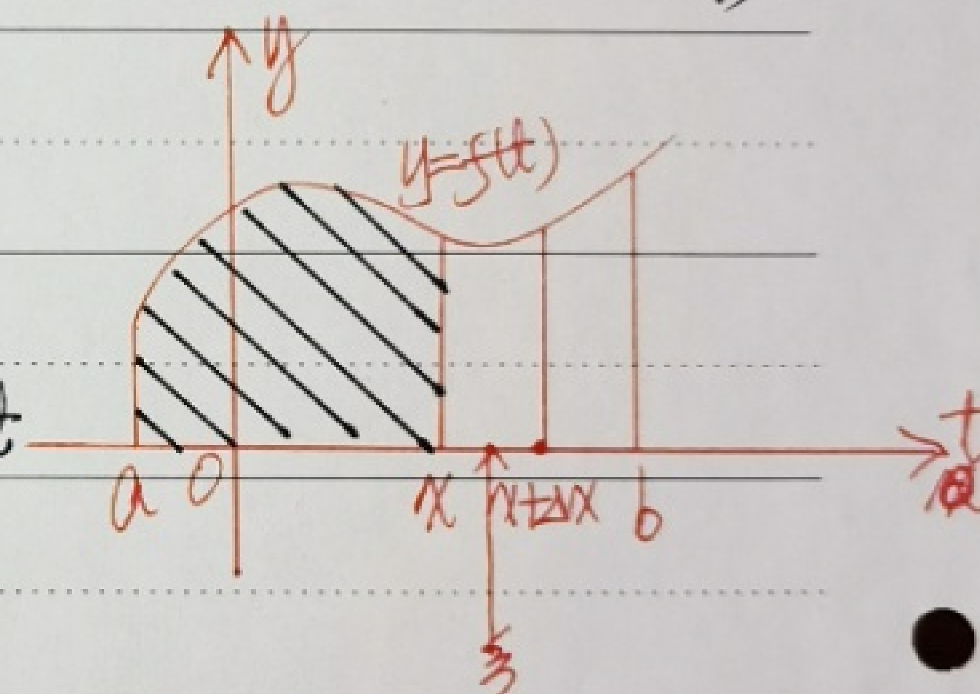
Calculus—微积分

一) fundamental theorem of calculus (FTC)

(1). 设 $f(x)\in C[a,b]$，$x\in[a,b]$，$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$，则变上限定积分 $\int_a^x f(t)dt$ 构成的函数可微，且 $\frac{d\Phi(x)}{dx}=\left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x=f(x)$，$x\in[a,b]$.

(2). 设 $F'(x)=f(x)\in C[a,b]$，则有 Newton—Leibniz 公式：

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)\triangleq F(x)\Big|_a^b. \qquad (☆1)$$



证(1)：设 $x+\Delta x\in[a,b]$，则

$$\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x}f(t)dt=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt$$

$$=\Phi(x)+\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt.$$

∵ $f(x)\in[a,b]$ 中 $C\Rightarrow f(t)$ 在 $[x,x+\Delta x]$ 中 C，由积分中值定理，

$\exists\xi\in[x,x+\Delta x]$，使 $\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt=f(\xi)\Delta x$，故有 $x\le\xi\le x+\Delta x$，使

$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=f(\xi)\Delta x\Rightarrow\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=f(\xi)\Rightarrow$

$$\frac{d\Phi(x)}{dx}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}f(\xi)=\lim_{\xi\to x}f(\xi)=f(x),\ x\in[a,b].$$

即 $\int_a^x f(t)dt$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.

例1. ∵ $f(x)=e^{x^2}\in C[0,x]$. ∴ $\left(\int_0^x e^{t^2}dt\right)'_x=e^{x^2}$; $\sin x^2\in C[a,x]$.

∴ $\left(\int_a^x \sin t^2 dt\right)'_x=\sin x^2$. 即 $\int_0^x e^{t^2}dt$ 是 e^{x^2} 的一个原函数; $\int_a^x \sin t^2dt$ 是 $\sin x^2$ 的一个原函数. 但是, $\int_0^x e^{t^2}dt$、$\int_a^x \sin t^2dt$ 都不是初等函数!

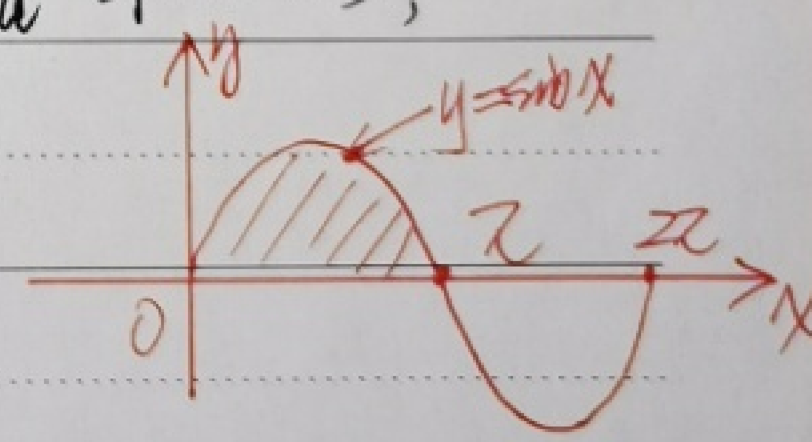
证(2): ∵ $F'(x)=f(x)\in C[a,b]$. ∴ $F(x)$ 与 $\int_a^x f(t)dt$ 都是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的原函数. 从而存在常数 C 使 $F(x)=\int_a^x f(t)dt+C$, $x\in[a,b]$,

令 $x=a$, 则 $F(a)=\int_a^a f(t)dt+C=0+C\Rightarrow C=F(a)$, 令 $x=b$, 则

$F(b)=\int_a^b f(t)dt+C=\int_a^b f(x)dx+F(a)\Longleftrightarrow\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)\triangleq F(x)\Big|_a^b$.

例2. 由Newton-Leibniz公式算:

(1). $\int_a^b x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_a^b=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$; $\int_a^b x^3dx=\frac{x^4}{4}\Big|_a^b=\frac{1}{4}(b^4-a^4)$;



(2). $\int_0^{\pi}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=-(\cos\pi-\cos 0)=2$;

(3). $\int_0^{2\pi}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{2\pi}=-(\cos 2\pi-\cos 0)=0$.

(4). 计算 $\int_0^1 \arctan x\,dx$; $\int_1^3 x^2\ln x\,dx$.

解(4)(i): ∵ $\int \arctan x\,dx=x\arctan x-\int x\,d(\arctan x)$

$$=x\arctan x-\int\frac{x\,dx}{1+x^2}=x\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}$$
$$=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$$

因此，$F(x)=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$ 是 $f(x)=\arctan x$ 在 $[0,1]$ 上的一个原函数，应 Newton-Leibniz 公式得：

$$\int_0^1\arctan x\,dx=\left(x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right)\Big|_0^1=\arctan 1-\frac{1}{2}\ln 2-0=\frac{\pi}{4}-\frac{\ln 2}{2}.$$

解(4)/29. $\because \int x^2\ln x\,dx=\frac{1}{3}\int\ln x\,dx^3=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\int x^3 d\ln x$
$$=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\int x^3\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{9}x^3+C$$

$\therefore F(x)=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{9}x^3$ 是 $x^2\ln x$ 在 $[1,3]$ 上的一个原函数，由 Newton-Leibniz 公式得：$\int_1^3 x^2\ln x\,dx=\left(\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{9}x^3\right)\Big|_1^3=(9\ln 3-3)-(-\frac{1}{9})=9\ln 3-3+\frac{1}{9}.$

(三) 证明题：

(1). 设 $f\in[a,b]$，$a\le\varphi(x)\le b$，且 $\varphi(x)$ 可导，则 $\left(\int_a^{\varphi(x)}f(t)dt\right)'_x=f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$

(2) 设 $f\in[a,b]$，$a\le\alpha(x)<\beta(x)\le b$，且 $\alpha(x),\beta(x)$ 可导，则

$$\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}f(t)dt\right)'_x=f(\beta(x))\cdot\beta'(x)-f(\alpha(x))\cdot\alpha'(x).\ \forall x\in[a,b].$$

(3). 设 $f,g\in C[a,b]$，则有 Cauchy 不等式：

$\left(\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \times \int_a^b g^2(x)dx$.　　(★2)

且(★2)中等号成立，当且仅当：$f(x)=\lambda g(x)$，$\forall x\in[a,b]$，λ为常数。

(4). 设 $f,g\in C[a,b]$，则有闵可夫斯基(Minkowski)不等式：

$\left(\int_a^b (f(x)+g(x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$.　(★3)

(5). 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，$b_1,b_2,\cdots b_n$ 是任意 $2n$ 个实数，则有Cauchy不等式：

$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\cdot b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$　　(★4)

(★4)中等号成立，当且仅当：$a_i=\lambda b_i$，$i=1,2,3,\cdots,n$，λ为常数.

(6). 设 $f(x)\in C[a,b]$，$f(x)\ge 0$，$\forall x\in[a,b]$ 且 $\int_a^b f(x)dx=0$，则 $f(x)\equiv 0$，$\forall x\in[a,b]$.

证(1). 令 $F(u)=\int_a^u f(t)dt$，则 $\int_a^{g(x)} f(t)dt=F(g(x))$，$\left(\int_a^{g(x)} f(t)dt\right)'_x=$

$\frac{dF(g(x))}{dx}=\frac{dF(u)}{du}\cdot\frac{du}{dx}=F'(u)\cdot g'(x)=\left(\int_a^u f(t)dt\right)'_u\cdot g'(x)=f(u)\cdot g'(x)=$

$f(g(x))\cdot g'(x)$，$\forall x\in[a,b]$.

证(2)：$\because \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt=\int_{\alpha(x)}^{c} f(t)dt+\int_c^{\beta(x)} f(t)dt=\int_c^{\beta(x)} f(t)dt-\int_c^{\alpha(x)} f(t)dt$，$c$是$[a,b]$

中任一点。则 $\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt\right)'_x=\left(\int_c^{\beta(x)} f(t)dt\right)'_x-\left(\int_c^{\alpha(x)} f(t)dt\right)'_x$

郭宽明

$=f(\beta(x))\cdot\beta'(x)-f(\alpha(x))\cdot\alpha'(x)$. $\forall x\in[a,b]$.

证(3). ∵ $(f(x)-tg(x))^2\geq 0$，对 $\forall t\in\mathbb{R}$ 都成立.

∴ $\int_a^b(f(x)-tg(x))^2dx\geq 0$，对 $\forall t\in\mathbb{R}$ 成立，即二次三项式：

$\int_a^b f^2(x)dx-2t\int_a^b f(x)g(x)dx+t^2\int_a^b g^2(x)dx\geq 0$ 对 $\forall t\in\mathbb{R}$ 成立 $\Longleftrightarrow$

$\Delta=\left(-2\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2-4\left(\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx\right)\leq 0$，即 Cauchy 不等式

$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\leq\left(\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx\right)$. 成立。

等号成立，当且仅当 $(f(x)-tg(x))^2\equiv 0$, $\forall x\in[a,b]$，即 $\exists\lambda=t$，使

$f(x)-\lambda g(x)\equiv 0\Longleftrightarrow f(x)\equiv\lambda g(x)$, $x\in[a,b]$ 成立，此时，称函数 $f(x)$

与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上是线性相关的。

证(4): ∵ $0\leq\int_a^b(f(x)+g(x))^2dx=\int_a^b f^2(x)dx+\int_a^b g^2(x)dx+2\int_a^b f(x)g(x)dx$.

而 $2\int_a^b f(x)g(x)dx\leq 2\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\leq 2\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$,

∴ $0\leq\int_a^b(f(x)+g(x))^2dx\leq\int_a^b f^2(x)dx+\int_a^b g^2(x)dx+2\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$

$=\left(\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2\Longleftrightarrow$

$\left(\int_a^b(f(x)+g(x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

与(4)对应的离散型的Minkowski不等式为：

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

证(5)：∵ $(a_i+tb_i)^2 \ge 0$，对 $\forall t\in R$ 成立，∴ $\sum_{i=1}^{n}(a_i+tb_i)^2 \ge 0$

对 $\forall t\in R$ 成立，即关于 t 的二次三项式：

$t^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2 + 2t\sum_{i=1}^{n}a_ib_i + \sum_{i=1}^{n}a_i^2 \ge 0$ 对 $\forall t\in R$ 成立，故

$\Delta = \left(2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right) \le 0$，即有Cauchy不等式：

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right) \Leftrightarrow \left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right| \le \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

若等号成立，当且仅当 $a_i+tb_i=0$，$i=1,2,3,\cdots,n$. 取 $\lambda=-t$，

则 $a_i=\lambda b_i$，$i=1,2,\cdots,n$.

证(6)：用反证法：设 $f(x)\not\equiv 0$，$x\in[a,b]$. 即 $\exists x_0\in(a,b)$ 使 $f(x_0)>0$.

由 $f(x)$ 在 x_0 处连续知，对于 $\varepsilon=\frac{f(x_0)}{2}>0$，$\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 即

$(x_0-\delta, x_0+\delta)\subset[a,b]$ 时，$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon=\frac{f(x_0)}{2} \Rightarrow f(x)>f(x_0)-\frac{f(x_0)}{2}=\frac{f(x_0)}{2}>0$，

$\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$. 从而 $\int_a^b f(x)dx \ge \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\frac{f(x_0)}{2}dx=\frac{f(x_0)}{2}\cdot 2\delta=\delta f(x_0)>0$

与已知条件中 $\int_a^b f(x)dx=0$ 矛盾！故 $f(x)\equiv 0$，$\forall x\in[a,b]$.

用同样的方法可证：若 $f(x)\in C[a,b]$，$f(x)\le 0$，$x\in[a,b]$ 且 $\int_a^b f(x)dx=0$，则 $f(x)\equiv 0$，$\forall x\in[a,b]$.

(三) 例子和作业：

① 证明：$\frac{2}{\sqrt[4]{e}}\le\int_0^2 e^{x^2-x}dx\le 2e^2$

② 计算：$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan t}\,dt}{\int_0^{\tan x}\sqrt{\sin t}\,dt}$

解(1)：设 $f(x)=e^{x^2-x}$，$x\in[0,2]$. 则 $f'(x)=e^{x^2-x}(2x-1)$，令 $f'(x)=0$

得 $x_0=\frac{1}{2}$，且比较 $f(0)=e^0=1$，$f(\frac{1}{2})=e^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$，$f(2)=e^2$ 的大小知：

$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的最小值为 $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$，最大值为 e^2. 即 $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}\le f(x)\le e^2\Rightarrow$

$\int_0^2\frac{1}{\sqrt[4]{e}}dx\le\int_0^2 f(x)dx\le\int_0^2 e^2dx\Leftrightarrow\frac{2}{\sqrt[4]{e}}\le\int_0^2 e^{x^2-x}dx\le 2e^2$.

解(2)：“$\frac{0}{0}$”型的极限，由洛比塔法则有：原式 $=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{\tan(\sin x)}\cos x}{\sqrt{\sin(\tan x)}\sec^2 x}$

$\frac{\tan(\sin x)\sim\sin x\sim x}{\sin(\tan x)\sim\tan x\sim x}\ \lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{x}{x}}=1$.

(四) 作业：ex 5.1

13；14；15；16；18(1),(2)；ch5 综/18.

五、证明积分中值定理：若 $f(x)\in C[a,b]$，则 $\exists\xi\in(a,b)$，使 $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$. $a<\xi<b$. (*)

(1°). 若 $f(x)\equiv C$，$\forall x\in[a,b]$，则取 $\xi=\frac{a+b}{2}\in(a,b)$，$f(\xi)=f(\frac{a+b}{2})=C$，

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b Cdx=C(b-a)=f(\xi)(b-a)$，$a<\xi=\frac{a+b}{2}<b$；

(2°). $\because f\in C[a,b]$，$\therefore f(x)$ 在 $[a,b]$ 上能取到最小值 m，最大值 M，即

$m\le f(x)\le M.\Rightarrow\int_a^b mdx=m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b Mdx=M(b-a)$. (*2).

Ⅰ). 若 $m(b-a)=\int_a^b f(x)dx$ 成立，则 $\int_a^b(f(x)-m)dx=0$ 且 $f(x)-m\in[a,b]$ 上 C，

$f(x)-m\ge0$，$\forall x\in[a,b]$. 依(6)知，$f(x)-m\equiv0$，$\forall x\in[a,b]$，即 $f(x)\equiv m$，

$x\in[a,b]$，依(1°)知，$\exists\xi=\frac{a+b}{2}\in(a,b)$，使(*)成立；

Ⅱ). 若 $M(b-a)=\int_a^b f(x)dx$ 成立 $\Rightarrow\int_a^b(M-f(x))dx=0$ 且 $M-f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 C，

$M-f(x)\ge0$，依(6)知，$M-f(x)\equiv0$，$\forall x\in[a,b]$，即 $f(x)\equiv M$，$x\in[a,b]\Rightarrow$

(*)成立.

Ⅲ). 若 $m(b-a)<\int_a^b f(x)dx<M(b-a)$ 则 $m<\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx<M$. 则

$\exists\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$，使 $f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\Leftrightarrow\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$，$\xi\in(a,b)$.

其中 $f(x_1)=m$，$f(x_2)=M$ 且不妨设 $x_1<x_2$。记住结论更重要. (8).

令$F(x)=\int_a^x f(t)dt$，$x\in[a,b]$，则$F(x)\in[a,b]$上d，对$F(x)$在$[a,b]$上

应用Lagrange微分中值Th：$\exists\xi\in(a,b)$使

$F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)\Rightarrow\int_a^b f(t)dt-0=f(\xi)(b-a)$ 即

$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$，$\xi\in(a,b)$.

注：课本上Th5.11（P174）的积分中值定理中，$\xi\in[a,b]$，

结果没有上述两种证明的结果好。ξ所在的范围会小，

表示结果更精确。