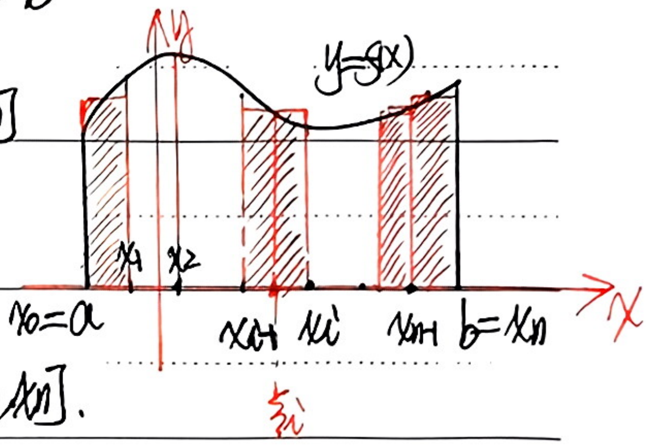
# 第七讲：函数的定积分(definite integral)之"十大性质"

(一) 定积分的概念：("八字方针"：分割、近似、求和、取极限)

(1) 求曲边梯形 $D=\begin{cases} 0\le y\le f(x) \\ a\le x\le b \end{cases}$ 的面积 $S(D)$.




(1°) 对区间 $[a,b]$ 进行分割 记作 $T$，将 $[a,b]$ 分割为 $n$ 个部分：令 $x_0=a$, $x_n=b$.

$T$: $[a,b]=[x_0,x_1]\cup[x_1,x_2]\cup\cdots\cup[x_{i-1},x_i]\cup\cdots\cup[x_{n-1},x_n]$.

设第 $i$ 个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 长度为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $i=1,2,3,\cdots,n$.

$\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$. 则 $\lambda>0$;

(2°) 近似：任取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$. 作积 $f(\xi_i)\Delta x_i$, $i=1,2,\cdots,n$. 则 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 是第 $i$ 个小曲边梯形面积的近似值。

(3°) 求和：$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \triangleq S_n(T)$，称 $S_n(T)$ 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上对应于分割 $T$ 的一个 Riemann 和.

(4°) 取极限：若 $\lim_{\lambda\to0^+}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在，且极限值与分法 $T$ 及 $\xi_i$ 取法

均无关，则称此极限值为曲边梯形D的面积，即

$$S(D) \triangleq \lim_{\lambda\to 0^+}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

此时，称$f(x)$在$[a,b]$上Riemann可积，记作$f(x)\in R[a,b]$，并称极限值：

$\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 为$f(x)$在$[a,b]$上的定积分，记作 $\int_a^b f(x)dx$，即

$$\int_a^b f(x)dx \triangleq \lim_{\lambda\to 0^+}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \qquad (*)$$

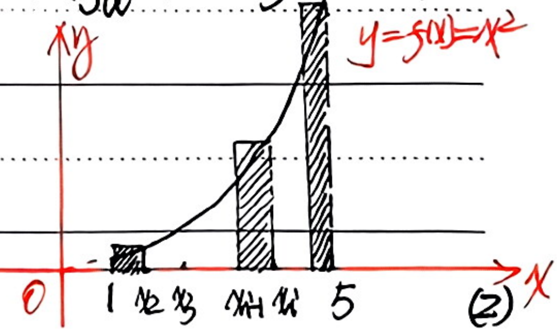
当$f(x)$在$[a,b]$上是连续函数时，极限值 $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 必存在且唯一（待证），从而$f(x)$必是$[a,b]$上Riemann可积的，记作$f\in R[a,b]$。

当$f(x)$在$[a,b]$上有定义且 $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在唯一时，同样称$f(x)$在$[a,b]$上是Riemann可积的。此时，$f(x)\le 0$也允许。

称(*)左边的$a$，$b$分别为积分的下限与上限；$[a,b]$称为积分区间。其余的同不定积分$\int f(x)dx$的叫法。

例1．证明：(1) $\int_1^5 x^2dx=\frac{1}{3}(5^3-1^3)$；(2) $\int_a^b x^2dx=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$，$(a<b)$.

证：∵$f(x)$在$[1,5]$上C，从而$f(x)=x^2$在$[1,5]$上Riemann可积，于是积分值




(2)

$\int_1^5 x^2dx$ 与 $[1,5]$ 的分法无关，可对 $[1,5]$ 进行 $n$ 等分；与 $\xi_i$ 在

$[x_{i-1},x_i]$ 中的取法也无关，可取 $\xi_i=x_i$ 或 $\xi_i=x_{i-1}$，此时，$\Delta x_1=\Delta x_2=\cdots$

$=\Delta x_n=\frac{5-1}{n}=\frac{4}{n}$，$\xi_i=x_i=1+\frac{4}{n}i$，$i=1,2,3,\cdots,n$，$f(\xi_i)=\xi_i^2=(1+\frac{4}{n}i)^2$

$=1+\frac{8}{n}i+\frac{16}{n^2}i^2$，$i=1,2,3,\cdots,n \Rightarrow \lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}=\frac{4}{n}$，

∴即：$\lambda\to0^+ \Longleftrightarrow n\to\infty$. 且 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}(1+\frac{8}{n}i+\frac{16}{n^2}i^2)\frac{4}{n}$

$=(n+\frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{16}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2)\frac{4}{n}=(n+\frac{8}{n}\frac{n(n+1)}{2}+\frac{16}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6})\frac{4}{n}$

$=4(1+4\frac{n+1}{n}+\frac{16}{6}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2})\xrightarrow{n\to\infty}4(1+4+\frac{16}{3})=\frac{124}{3}$,

即 $\int_1^5 x^2dx \triangleq \lim_{\lambda\to0^+}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(1+\frac{4}{n}i)^2\frac{4}{n}=\frac{124}{3}=\frac{1}{3}(5^3-1^3)$.

证(2). 证：对 $[a,b]$ 区间进行 $n$ 次等分，且 $\Delta x_1=\Delta x_2=\cdots=\Delta x_i=\cdots=\Delta x_n=\frac{b-a}{n}$,

$\lambda=\max\{\Delta x_1,\cdots,\Delta x_n\}=\frac{b-a}{n}$，$\lambda\to0^+\Longleftrightarrow n\to\infty$. 且可取 $\xi_i=x_i$

$=a+\frac{b-a}{n}i \Rightarrow f(\xi_i)=\xi_i^2=(a+\frac{b-a}{n}i)^2$

则 $\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}(a+\frac{b-a}{n}i)^2\frac{b-a}{n}=\sum_{i=1}^{n}(a^2+\frac{2a(b-a)}{n}i+\frac{(b-a)^2}{n^2}i^2)\frac{b-a}{n}$

$=(a^2n+\frac{2a(b-a)}{n}\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(b-a)^2}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6})\frac{b-a}{n}$

(3).

四) $\int_a^b x^2dx \triangleq \lim\limits_{\lambda\to 0^+}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i =$

$$\lim_{n\to\infty}\left(a^2 n+\frac{2a(b-a)\,n(n+1)}{2n}+\frac{(b-a)^2}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\frac{b-a}{n}$$

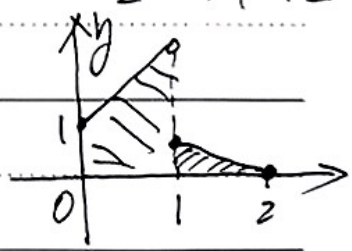
$$=(b-a)\left(a^2+a(b-a)+\frac{1}{3}(b-a)^2\right)=\frac{1}{3}(b-a)(b^2+ab+a^2)=\frac{1}{3}(b^3-a^3).$$

同理可证：$\int_a^b x^3dx=\frac{1}{4}(b^4-a^4)$, $(a<b)$；$\int_a^b x^4dx=\frac{1}{5}(b^5-a^5)$, …, $\int_a^b x^n dx=\frac{1}{n+1}(b^{n+1}-a^{n+1})$, $(a<b)$, $\forall n\in N^*$.

(三) 定积分的"十大"性质（设 $f(x), g(x)\in R[a,b]$）

则 $M=2$ 是 $f$ 在 $[1,2]$ 上的上界，不是最大值，$m=0$ 是下界，也是最小值。

如 $f(x)=\begin{cases} x+1, & 0\le x<1 \\ -\frac{x}{2}+1, & 1\le x\le 2 \end{cases}$




(1°) $\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$.

(2°) $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$.（$k$ 为常数）

(1°),(2°)两条合称定积分具有线性性质。

(3°) 保序性：若 $f(x)\ge g(x)$, $\forall x\in[a,b]$, 则 $\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx$,

(4°) 保号性：若 $f(x)\ge 0$, $\forall x\in[a,b]$, 则 $\int_a^b f(x)dx\ge 0$.

(5°) 定积分估值公式：若 $A\le f(x)\le B$, $x\in[a,b]$, 则

$A(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le B(b-a)$. （注：$A, B$ 未必是 $f$ 在 $[a,b]$ 上的最值）

$A, B$ 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的下界与上界。

(6°) 积分中值定理：若 $f(x)\in C[a,b]$，则至少有一点 $\xi\in[a,b]$，使

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$ (第2).

(7°). 积分不等式：$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$ (第3)

(8°). 定积分关于积分区间的可加性：设 $x_1, x_2, x_3$ 是 $[a,b]$ 中任意三点，则必有 $\int_{x_1}^{x_3} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx$.

(9°). $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \Longrightarrow \int_a^a f(x)dx = 0$.

(10°). 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的值与积分变量无关，仅与 $f(x)$ 及 $[a,b]$ 有关，

即 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(v)dv = \cdots$

(三) 练习：

EX5.1: 2; 3; 4; 5; 6; 7.

(注：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必定有界)

$\because f\in R[a,b] \Longleftrightarrow \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在唯一 $\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 有界 $\Longrightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界. 即 $f$ 在 $[a,b]$ 上有界是 $f$ 在 $[a,b]$ 上可积的必要条件！)

(5).

## (四) 微分学复习:

例1. 要使 $f(x)=\begin{cases} x^3, & x\le 1 \\ ax^2+bx+c, & x>1 \end{cases}$ $(a\ne 0)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 中处处有连续的曲率. $a,b,c$ 应取何值?

解: 从曲率公式: $k(x)=\dfrac{y''(x)}{(1+y'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}$ 可知, 当 $y'(x), y''(x)$ 即 $f'(x), f''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续时, 曲率 $k(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 中处处C.

而 $f'(x)=\begin{cases} 3x^2, & x<1 \\ 2ax+b, & x>1 \end{cases}$; $f''(x)=\begin{cases} 6x, & x<1 \\ 2a, & x>1. \end{cases}$

由 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 中连续知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 中C $\Rightarrow f(x)$ 在 $x=1$ 处C

$\Rightarrow f(1-0)=f(1)=f(1+0) \Rightarrow 1^3=1^3=a\cdot 1+b\cdot 1+c$ (*1).

显然 $f'(x), f''(x)$ 在 $(-\infty,1),(1,+\infty)$ 中皆C. 故只要 $f'(x), f''(x)$ 在 $x=1$ 处也C, 则 $f'(x), f''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 中处处C.

由 $f'(1-0)=\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 3x^2=3$ 及 $f(x)$ 在 $x=1$ 处C 可知.

$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \xlongequal{\text{微分中值定理}} \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f'(\xi)(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{\xi\to 1^-} f'(\xi)=\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=3.$

同理, $f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2ax+b)=2a+b$

当且仅当 $f'_-(1)=f'_+(1)=3$ 时，即 $2a+b=3$ 时，$f'(1)=3$.

$$\text{即 } f'(x)=\begin{cases}3x^2 & x<1\\ 3 & x=1\\ 2ax+b & x>1.\end{cases}$$

同理：由于 $f'(x)$ 在 $x=1$ 处 C，且 $\lim\limits_{x\to1^-}f''(x)=\lim\limits_{x\to1^-}6x=6$ 存在，

故 $f''_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}f''(x)=6$；由 $\lim\limits_{x\to1^+}f''(x)=\lim\limits_{x\to1^+}2a=2a\Rightarrow f''_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}f''(x)$ $=2a$，当且仅当 $f''_-(1)=f''_+(1)=6$ 时，即 $2a=6\Rightarrow a=3$ 时，$f''(1)=6$.

此时，由 $2a+b=3$ 知 $b=-3$，将 $a=3$，$b=-3$ 代入：$a+b+c=1\Rightarrow c=1$.

$$\text{此时，} f''(x)=\begin{cases}6x & x<1\\ 6 & x=1\\ 6 & x>1.\end{cases}$$

即当 $a=3$，$b=-3$，$c=1$ 时，$f(x)$，$f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上 C，从而由题 $f''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处连续。

解法2：用定义法求 $f'(1)$，$f''(1)$.

则从 $f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^3-1}{x-1}\xlongequal{\text{洛必达}}\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{3x^2}{1}=3$

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(ax^2+bx+c)-1}{x-1}$ (★)

从 $f$ 的连续知，$f(x)$ 在 $x=1$ 处 C $\Rightarrow f(1-0)=f(1)=f(1+0)\Rightarrow$

$1^3=1^3=a+b+c\Rightarrow c=1-(a+b)$，代入(★)得：

(7).

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{ax^2+bx+1-(a+b)-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{a(x^2-1)+b(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}[a(x+1)+b]$

$=2a+b$，从 $f'_-(1)=f'_+(1)=f'(1)\Rightarrow 2a+b=3\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}3x^2, & x<1\\ 3, & x=1\\ 2ax+b, & x>1\end{cases}$

从 $f''_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{3x^2-3}{x-1}\xlongequal{\text{洛必达}}\lim\limits_{x\to1^-}\frac{6x}{1}=6$.

$f''_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{(2ax+b)-3}{x-1}\xlongequal{\text{洛必达}}\lim\limits_{x\to1^+}\frac{2a}{1}=2a$

由 $f''_-(1)=f''_+(1)=f''(1)\Rightarrow 6=2a\Rightarrow a=3$，代入 $2a+b=3\Rightarrow b=-3$，

再代入 $c=1-(a+b)=1-0=1\Rightarrow a=3;\ b=-3,\ c=1$ 时，

曲率 $k(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处 $C$.

例2. 已知：$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3+ax^2+b}{x-1}=5$，求 $a,b$ 之值.

解：从极限存在且分母趋于零，知分子极限为零：

$\lim\limits_{x\to1}(x^3+ax^2+b)=0\Rightarrow 1^3+a\cdot1^2+b=0\Rightarrow a+b=-1\Leftrightarrow b=-1-a$

代入原式左边：$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3+ax^2+(-1-a)}{x-1}=5\Rightarrow\lim\limits_{x\to1}\frac{(x^3-1)+a(x^2-1)}{x-1}=5$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to1}[x^2+x+1+a(x+1)]=5\Rightarrow 3+2a=5\Rightarrow a=1\Rightarrow b=-1-a=-2$.

注：求出 $a+b=-1$ 后，也可用洛必达法则求得：$3+2a=5$.

例3. 已知：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，求 $a,b$ 之值。