第26讲：分部积分法与部分分式法

(一) 分部积分法的原理与公式：

设 $u(x), v(x)$ 在区间 I 上皆可微分，则有：$d(uv)=vdu+udv$

两边积分：$\int d(uv)=\int vdu+\int udv$，即 $uv=\int vdu+\int udv$

从而有：$\int udv=uv-\int vdu$　　　　(式1)

(式1)即是分部积分公式，有时，$\int vdu$ 比 $\int udv$ 更容易积分。

例1. 求下列不定积分 I.

(1). $\int \arctan x dx$；(2). $\int \ln x dx$；(3) $\int x^2\sin 5x dx$；(4). $\int \sqrt{a^2+x^2}dx$

(5). $\int \sec x dx$；(6) $\int \csc x dx$；(7). $\int x\arctan x dx$，(8). $\int \cos 3x e^{-5x}dx$.

解(1)：令 $u(x)=\arctan x, v(x)=x$，由(式1)知

$I=x\arctan x-\int x d(\arctan x)=x\arctan x-\int \frac{x}{1+x^2}dx$

$=x\arctan x-\frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$

解(2)：令 $u(x)=\ln x, v(x)=x$，则有

$I=x\ln x-\int x d(\ln x)=x\ln x-\int x\frac{1}{x}dx=x\ln x-x+C$

解(3). $I=-\frac{1}{5}\int x^2 d\cos 5x=-\frac{1}{5}x^2\cos 5x+\frac{1}{5}\int\cos 5x\,d(x^2)$

$=-\frac{1}{5}x^2\cos 5x+\frac{2}{5}\int x\cos 5x\,dx=-\frac{1}{5}x^2\cos 5x+\frac{2}{25}\int x\,d\sin 5x$

$=-\frac{1}{5}x^2\cos 5x+\frac{2}{25}x\sin 5x-\frac{2}{25}\int\sin 5x\,dx$

$=-\frac{1}{5}x^2\cos 5x+\frac{2}{25}x\sin 5x+\frac{2}{5^3}\cos 5x+C$

(注(1): 对 $\forall n\in N^*$, $\int x^n\sin ax\,dx$; $\int x^n\cos ax\,dx$ 都可用分部积分法解)

解(4). 设 $u(x)=\sqrt{a^2+x^2}$, $v(x)=x$, 则 $I=x\sqrt{a^2+x^2}-\int x\,d\sqrt{a^2+x^2}$

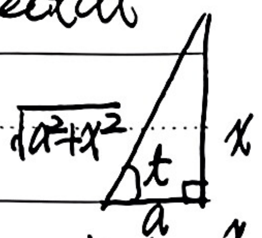
$=x\sqrt{a^2+x^2}-\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx=x\sqrt{a^2+x^2}-\int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$

$=x\sqrt{a^2+x^2}-I+a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$, 解得: $I=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$

设 $I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$ $(a>0)$. 令 $x=a\tan t$, $t\in(0,\frac{\pi}{2})$, 则 $dx=a\sec^2 t\,dt$

$\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2\sec^2 t}=a\sec t\Rightarrow I_1=\int\frac{a\sec^2 t\,dt}{a\sec t}=\int\sec t\,dt$

$=\ln|\sec t+\tan t|+C_1=\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}+\frac{x}{a}\right|+C_1$



$\tan t=\frac{x}{a}$

$=\ln|\sqrt{a^2+x^2}+x|+C$. $(C=C_1-\ln a)$

(注(2): $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln|\sqrt{x^2\pm a^2}+x|+C$), $(a>0)$

综上, $I=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln|\sqrt{a^2+x^2}+x|+C$.

解(5) $I=\int \frac{1}{\cos x}dx=\int\frac{\cos x dx}{\cos^2 x}=\int\frac{d\sin x}{1-\sin^2 x}=\int\frac{d\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}$

$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-\sin x}+\frac{1}{1+\sin x}\right)d\sin x=\frac{-1}{2}\int\frac{d(1-\sin x)}{1-\sin x}+\frac{1}{2}\int\frac{d(1+\sin x)}{1+\sin x}$

$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}\right|+C=\ln|\sec x+\tan x|+C$

即 $I=\int\sec x dx=\ln|\sec x+\tan x|+C$,

同理: $I=\int\csc x dx=\ln|\csc x-\cot x|+C$.

解(7): $I=\frac{1}{2}\int\arctan x\, d(x^2)=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int x^2 d(\arctan x)$

$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$

而 $\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\int\frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}dx=\int 1dx-\int\frac{dx}{1+x^2}=x-\arctan x+C$

$\therefore I=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}(x-\arctan x)+C$.

解(8): $I=\frac{1}{3}\int e^{-5x}d\sin 3x=\frac{1}{3}\sin 3x e^{-5x}-\frac{-5}{3}\int\sin 3x e^{-5x}dx$

$=\frac{1}{3}\sin 3x e^{-5x}+\frac{-5}{3\times 3}\int e^{-5x}d\cos 3x=\frac{1}{3}\sin 3x e^{-5x}-\frac{5}{9}\cos 3x e^{-5x}+$

$\frac{-25}{9}\int\cos 3x e^{-5x}dx=\frac{1}{3}e^{-5x}(\sin 3x-\frac{5}{3}\cos 3x)-\frac{25}{9}I\Rightarrow$

$(1+\frac{25}{9})I=\frac{1}{3}e^{-5x}(\sin 3x-\frac{5}{3}\cos 3x)+C_1\Rightarrow$

$I=\frac{9}{34\times 3}e^{-5x}(\sin 3x-\frac{5}{3}\cos 3x)+C$, $(C=\frac{9}{34}C_1)$

(三) 有理函数 $R(x)$ 的积分.

设 $R(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$

其中, $Q_m(x)\neq 0$, $a_0,a_1,\cdots,a_n,b_0,\cdots,b_m$ 为常数, $n,m\in N$, $a_0b_0\neq 0$.

则称 $\int R(x)dx$ 为有理函数的积分. 可以证明: $\int R(x)dx$ 都存在且全部都是初等函数。

例2. 求下列不定积分I:

(1). $\int\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx$; (2). $\int\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$; (3). $\int\frac{1-x^2}{1+x^4}dx$, (4). $\int\frac{dx}{1+x^4}$

(5). $\int\frac{dx}{x(x^n+1)}$, $\forall n\in N^*$. (6). $\int\frac{dx}{x^3+1}$. (7). $\int\frac{x^{15}dx}{(x^8+1)^2}$.

解(1): 法(一). 部分分式法: 以 $\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}=\frac{x^2+1}{(x^2+1)^2-x^2}=\frac{x^2+1}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$

令 $=\frac{ax+b}{x^2+x+1}+\frac{cx+d}{x^2-x+1}$, 则

$x^2+1=(ax+b)(x^2-x+1)+(cx+d)(x^2+x+1)$. 比较两边系数得.

$\begin{cases}a+0b+c+0d=0\\ a+b-c+d=1\\ a+b+c-d=0\\ 0a+b+0c+d=1\end{cases}$ 解得线性方程组的唯一解为: $\begin{cases}a=0\\ b=\frac{1}{2}\\ c=0\\ d=\frac{1}{2}.\end{cases}$

(由线性代数中的Cramer(克莱姆)法则, 可求得同样的解)

即 $I=\int\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx=\int\frac{\frac{1}{2}dx}{x^2+x+1}+\int\frac{\frac{1}{2}dx}{x^2-x+1}$

$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}+\frac{1}{2}\int\frac{d(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$

法(三)：凑公式法：$I=\int\frac{(1+x^{-2})dx}{x^2+1+x^{-2}}=\int\frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+3}$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{3}}+C$，$(x\neq 0)$.

练习(3) 法(一)：$I=\int\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\int\frac{x^{-2}+1}{x^{-2}+x^2}dx=\int\frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}+C$．$(x\neq 0)$ (凑公式法).

法(二)：(部分分式法)：∵ $\frac{1+x^2}{1+x^4}=\frac{1+x^2}{(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2}=\frac{1+x^2}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}$

令 $\frac{ax+b}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{cx+d}{x^2-\sqrt{2}x+1}\Rightarrow 1+x^2=(ax+b)(x^2-\sqrt{2}x+1)+(cx+d)(x^2+\sqrt{2}x+1)$

比较系数得：$a=c=0$；$b=d=\frac{1}{2}$.

∴ $\int\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\int\frac{\frac{1}{2}dx}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\int\frac{\frac{1}{2}dx}{x^2-\sqrt{2}x+1}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x+\frac{\sqrt{2}}{2})}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}+\frac{1}{2}\int\frac{d(x-\frac{\sqrt{2}}{2})}{(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}[\arctan(\sqrt{2}x+1)+\arctan(\sqrt{2}x-1)]+C$，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$.

练习(3) 法(一)(凑公式法)：$I=\int\frac{1-x^2}{1+x^4}dx=\int\frac{x^{-2}-1}{x^{-2}+x^2}dx=-\int\frac{d(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2}$

$= -\frac{1}{2\sqrt2}\ln\left|\frac{x+\frac1x-\sqrt2}{x+\frac1x+\sqrt2}\right|+C$；法(二)(部分分式法)(自己动手算).

解(4) 法(一)(凑分式法)：$I=\int\frac{1}{1+x^4}dx=\frac12\left(\int\frac{1+x^2}{1+x^4}dx+\int\frac{1-x^2}{1+x^4}dx\right)$

$=\frac12\left(\frac{1}{\sqrt2}\arctan\frac{x-\frac1x}{\sqrt2}-\frac{1}{2\sqrt2}\ln\left|\frac{x+\frac1x-\sqrt2}{x+\frac1x+\sqrt2}\right|\right)+C$，法(二)(部分分式法).

解(5)：$I=\int\frac{dx}{x(x^n+1)}=\int\frac{x^{n-1}dx}{x^n(x^n+1)}=\frac1n\int\frac{dx^n}{x^n(x^n+1)}=\frac1n\int\left(\frac{1}{x^n}-\frac{1}{x^n+1}\right)dx^n$

$=\frac1n\left(\int\frac{dx^n}{x^n}-\int\frac{d(x^n+1)}{x^n+1}\right)=\frac1n\ln\left|\frac{x^n}{x^n+1}\right|+C$.(凑分式法).

解(7)：$I=\int\frac{x^{15}}{(x^8+1)^2}dx=\frac1{16}\int\frac{dx^{16}}{x^{16}+2x^8+1}=\frac1{16}\int\frac{d(x^{16}+2x^8+1)}{x^{16}+2x^8+1}-\frac18\int\frac{d(x^8+1)}{(x^8+1)^2}$

$=\frac1{16}\ln(x^{16}+2x^8+1)+\frac18(x^8+1)^{-1}+C$.

解(6)：$I=\int\frac{1}{x^3+1}dx$，∵ $\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}\xlongequal{令}\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}\Leftrightarrow$

$1=a(x^2-x+1)+(x+1)(bx+c)$，比较两边系数得：$a=\frac13$，$b=-a=-\frac13$，$c=\frac23$.

∴ $I=\int\frac{\frac13}{x+1}dx+\int\frac{-\frac13x+\frac23}{x^2-x+1}dx=\frac13\int\frac{d(x+1)}{x+1}-\frac{1}{3\times2}\int\frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1}+\frac12\int\frac{dx}{x^2-x+1}$

$=\frac13\ln|x+1|-\frac16\ln|x^2-x+1|+\frac12\int\frac{d(x-\frac12)}{(x-\frac12)^2+(\frac{\sqrt3}{2})^2}$

$=\frac13\ln|x+1|-\frac16\ln|x^2-x+1|+\frac{1}{\sqrt3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt3}+C$.

在有理函数积分中，若被积函数 $f(x)=\frac{1}{(x+1)^3(x^2-x+1)^2}$，则根据部分分式法解题的原理，应设：

$$\frac{1}{(x+1)^3(x^2-x+1)^2}=\frac{a_1}{x+1}+\frac{a_2}{(x+1)^2}+\frac{a_3}{(x+1)^3}+\frac{b_1x+c_1}{x^2-x+1}+\frac{b_2x+c_2}{(x^2-x+1)^2} \quad (※)$$

再通过比较：$1=a_1(x+1)^2(x^2-x+1)^2+a_2(x+1)(x^2-x+1)^2+a_3(x^2-x+1)^2+(b_1x+c_1)(x^2-x+1)(x+1)^3+(b_2x+c_2)(x+1)^3$ 两边的系数，求出 $a_1,a_2,a_3,b_1,c_1,b_2,c_2$ 再分别对(※)的右边各项积分，即可。

(三). 微积分学复习

例1. 利用 L'Hospital 法则 证明下题：

(1). 设 $f(x)=\frac{\sin x^2}{x}$，$x\in(0,+\infty)$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在. 但 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 不存在；

(2) 若已知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 中可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A\in\mathbb{R}$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ 也存在，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A$.

证(1)：∵ $f'(x)=\frac{2x^2\cos x^2-1\cdot\sin x^2}{x^2}=2\cos x^2-\frac{1}{x^2}\sin x^2$，$\forall x\in(0,+\infty)$.

且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sin x^2=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在. 但 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 中

∵ $\lim\limits_{x\to+\infty}2\cos x^2$ 不存在，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\sin x^2=0$. 故 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 不存在。

证(2) 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A\in\mathbb{R}$.

而极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ 为 "$\frac{*}{\infty}$" 型. "$\frac{*}{\infty}$" 属于广义的 "$\frac{\infty}{\infty}$" 型范畴. 在证明 "$\frac{\infty}{\infty}$" 型的洛必达法则时, 只用到了分母趋于 ∞ 的条件, 对分子并没有什么要求. 因此, 应用 "$\frac{\infty}{\infty}$" 型的洛必达法则时, 分子的函数可以有任意的趋向, 包括趋于 ∞.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{1}=A.$$

(3) 若已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A\in R$, 则 $A=0$.

证(3): $0=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x f(x)}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x f(x)+e^x f'(x)}{e^x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x))=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)+\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0+A\Rightarrow A=0.$

例2. 要使函数 $f(x)=\begin{cases}x^3 & x\le 1\\ ax^2+bx+c & x>1\end{cases}$ $(a>0)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处有连续的曲率, a,b,c 应取何值? (思考题)

(四) 作业:

EX4.1: 5/(1), (2), (5), (8), (9), (10);

EX4.2: 1/(3), (4), (5); 2/(5).