第25讲：第二换元积分法(即变量代换法)

(一)、微积分学复习：

(1)、设 $x_1=\sin x_0>0$，$x_{n+1}=\sin x_n$ $(n\geq 1)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{3}}x_n=1$.

(2)、设 $0<a<b$，比较 a^b 与 b^a 的大小。

(3)、试证明：$3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)\equiv\pi$，$x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$.

证(1)：(1°) ∵ $x_1=\sin x_0\in(0,\pi)$，∴ $x_2=\sin x_1\in(0,\pi)$，… $x_{n+1}=\sin x_n\leq x_n$

$n=1,2,3,\cdots\Rightarrow\{x_n\}\downarrow$ 且 $x_n>0$，故 $\{x_n\}$ 收敛，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

则有 $A=\sin A\Leftrightarrow A=0$，故 $x_n\downarrow 0$ (严) $(n\to\infty)\Rightarrow\frac{1}{x_n^2}\uparrow+\infty$ (严)

(2°) 令 $a_n=n$，$b_n=\frac{1}{x_n^2}$ 则 $b_n\uparrow+\infty$ (严)，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-(n-1)}{\frac{1}{x_n^2}-\frac{1}{x_{n-1}^2}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n^2x_{n-1}^2}{x_{n-1}^2-x_n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\sin^2x_{n-1})x_{n-1}^2}{x_{n-1}^2-\sin^2x_{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}^4}{x_{n-1}^2-(x_{n-1}-\frac{1}{6}x_{n-1}^3+o(x_{n-1}^3))^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}^4}{x_{n-1}^2-(x_{n-1}^2-\frac{1}{3}x_{n-1}^4+o(x_{n-1}^4))}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}^4}{\frac{1}{3}x_{n-1}^4+o(x_{n-1}^4)}=3$

依Stolz Th，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}nx_n^2=3\Rightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\,x_n=\sqrt{3}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{3}}\,x_n=1$.

解(2). ∵ $a^b=e^{b\ln a}$，$b^a=e^{a\ln b}$，∴ 比较 $b\ln a$ 与 $a\ln b$

即可. 从 $b\ln a < a\ln b \Rightarrow \frac{\ln a}{a} < \frac{\ln b}{b}$. 可以想到.

设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, $x\in(0,+\infty)$. 则 $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$

1° 当 $0<x<e$ 时, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ 在 $(0,e)$ 中严增. 当 $0<a<b<e$ 时,

$\frac{\ln a}{a}<\frac{\ln b}{b} \Rightarrow a^b<b^a$. 如 $0<1.5<2.4<e \Rightarrow 1.5^{2.4}<2.4^{1.5}$.

2° 当 $x>e$ 时, $f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 中严减, 当 $a<b$ 且 $a>e$ 时,

$f(b)<f(a) \Rightarrow \frac{\ln b}{b}<\frac{\ln a}{a} \Rightarrow a^b>b^a$, 如 $e<3<4$, 则

$3^4>4^3$. 又如 $e<99<100$, 则 $99^{100}>100^{99}$.

3° 当 $0<a<e<b$ 时. 情况不定, 如 $0<2<e<4$, 有 $2^4=4^2$

又如 $0<2<e<3$, 有 $2^3<3^2$. 当 $0<2<e<5$ 时, $2^5>5^2$.

证(3): 1° 当 $x=\frac{1}{2}$ 时, $3\arccos\frac{1}{2}-\arccos(\frac{3}{2}-4\times(\frac{1}{2})^3)=3\times\frac{\pi}{3}-0=\pi$,

同理, $x=-\frac{1}{2}$ 时, $3\arccos(-\frac{1}{2})-\arccos(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2})=3\times\frac{2}{3}\pi-\pi=\pi$.

2° 当 $x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 时, $\because (3\arccos x-\arccos(3x-4x^3))'=$

$\frac{-3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{3-12x^2}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}}=3\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{(1-2x)(1+2x)}{\sqrt{(1-3x+4x^3)(1+3x-4x^3)}}\right)$

$=3\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{(1-2x)(1+2x)}{\sqrt{(x+1)(1-2x)^2(1-x)(1+2x)^2}}\right)=3\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\equiv 0$.

$\therefore 3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)\equiv C$, $\forall x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

取 $x=0$，则有 $C=3\arccos 0-\arccos(3\times 0-4\times 0^3)=3\times\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=\pi$，

综合(1°)，(2°)，有，对 $\forall x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$，

$3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)\equiv\pi$.

注：第(3)题 若设 $\arccos x=\alpha$，$\arccos(3x-4x^3)=\beta$，则 $\cos\alpha=x$，$\sin\alpha=\sqrt{1-x^2}$，$\cos\beta=3x-4x^3$，$\sin\beta=\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}$. 用初等也可证出。

(二) 第二换元积分法 原理 { ① 复合函数求导法则；② 反函数求导法则.

Th：设 $x=\varphi(t)$ 在 I 上可微，且 $\varphi'(t)\neq 0$，$\forall t\in I$，且

$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=G(t)+C$，则 $\int f(x)dx=G(\varphi^{-1}(x))+C$

证：由 $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=G(t)+C\Longrightarrow\frac{dG(t)}{dt}=f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

于是，$\frac{d(G(\varphi^{-1}(x)))}{dx}=\frac{dG(t)}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=f(\varphi(t))\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=f(\varphi(t))=f(x)$

即知，$\int f(x)dx=G(\varphi^{-1}(x))+C$，

常用到 3倍角公式：

$$\begin{cases}\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta\\ \sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta\end{cases}$$

(三). 求下列不定积分 I (a>0，常数)

(1) $\int x^2(x+3)^{99}dx$，(2) $\int\tan x dx$，(3) $\int\cot x dx$，(4) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$

(5). $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$，(6) $\int\sec x dx$，(7) $\int\csc x dx$，(8) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$，($|x|>1$)

解(1). 设 $x+3=u$，则 $x=u-3$，$dx=du$，$I_1=\int(u-3)^2u^{99}du$

$=\int(u^2-6u+9)u^{99}du=\int(u^{101}-6u^{100}+9u^{99})du$

$= \frac{u^{102}}{102} - \frac{6}{101}u^{101} + 9\frac{u^{100}}{100} + C \xrightarrow{回代} \frac{(x+3)^{102}}{102} - \frac{6}{101}(x+3)^{101} + \frac{9}{100}(x+3)^{100} + C.$

解(2): $I_2 = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$, $(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2})$

解(3): $I_3 = \int\frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{d\sin x}{\sin x} = \ln|\sin x| + C$. $(x\neq k\pi)$

解(4): 令 $\sqrt[6]{x} = t$, 则 $x = t^6$, $dx = 6t^5dt$, $\sqrt{x} = (\sqrt[6]{x})^3 = t^3$, $\sqrt[3]{x} = (\sqrt[6]{x})^2 = t^2$, $I_4 = \int \frac{6t^5dt}{t^3(1+t^2)} = 6\int\frac{t^2dt}{(1+t^2)} = 6\int\frac{(t^2+1)-1}{1+t^2}dt$

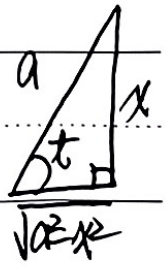
$= 6\int dt - 6\int\frac{dt}{1+t^2} = 6t - 6\arctan t + C = 6\sqrt[6]{x} - 6\arctan\sqrt[6]{x} + C.$

解(5): 令 $x = a\sin t$, $t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 则 $\sin t = \frac{x}{a} \Rightarrow t = \arcsin\frac{x}{a}$

$I_5 = \int\sqrt{a^2-x^2}dx = \int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,d(a\sin t) = \int(a\cos t)(a\cos t)dt = \int a^2\cos^2 t\,dt$

$= a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt = a^2(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t)+C = a^2(\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\sin t\cos t)+C$

$\xrightarrow{回代} a^2(\frac{1}{2}\arccos\frac{x}{a} + \frac{1}{2}\frac{x}{a}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a})+C$



$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$

$I_6 = \int\frac{1}{\cos x}dx = \int\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx = \int\frac{d\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = \frac{1}{2}\int(\frac{1}{1-\sin x}+\frac{1}{1+\sin x})d\sin x$

$= -\frac{1}{2}\int\frac{d(1-\sin x)}{1-\sin x} + \frac{1}{2}\int\frac{d(1+\sin x)}{1+\sin x} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}\right|+C$

$= \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|+C = \ln|\sec x+\tan x|+C = \int\sec x\,dx$ 得.

同理可得：$I_7=\int\frac{dx}{\sin x}=\ln|\csc x-\cot x|+C$.

解(8)：(1°) 设 $x=\frac{1}{t}>1$，则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$，$I_8=\int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}$

$=-\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=-\arcsin t+C\xlongequal{回代}-\arcsin\frac{1}{x}+C.\ (x>1)$

(2°) 设 $x<-1$，令 $u=-x$ 则 $u=-x>1$ 且 $dx=-du$

$I_8=\int\frac{-du}{(-u)\sqrt{u^2-1}}=\int\frac{du}{u\sqrt{u^2-1}}=-\arcsin\frac{1}{u}+C$

$=-\arcsin\frac{1}{-x}+C=\arcsin\frac{1}{x}+C$

综上(1°),(2°)所述，$I_8=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\begin{cases}-\arcsin\frac{1}{x}+C, & x>1\\ \arcsin\frac{1}{x}+C, & x<-1\end{cases}$

解(法2)：(1°) 设 $x=\sec t$，$t\in(0,\frac{\pi}{2})$，则 $x>1$，$dx=\sec t\tan t\,dt$.

$\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\tan^2 t}=\tan t$，$I_8=\int\frac{\sec t\tan t\,dt}{\sec t\tan t}=\int 1dt=t=$

$\operatorname{arcsec}x+C.\ (x>1)$，

(2°) 设 $x=\sec t$，$t\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，则 $x<-1$，则

$I_8=\int\frac{\sec t\tan t}{\sec t(-\tan t)}dt=-\int dt=-t+C=-\operatorname{arcsec}x+C,\ (x<-1)$.

故 $I_8=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}=\begin{cases}\operatorname{arcsec}x+C & (x>1)\\ -\operatorname{arcsec}x+C & (x<-1)\end{cases}$.

选作作业：P X4-1：3/(1),(2),(3),(4),(5),(9),$\cancel{(10)}$,(12)；7/(1),(3),(4).

五) 微分学复习题：

(1) 设 $f(x)\in C[a,+\infty)$，当 $x>a$ 时，$f'(x)\ge k>0$（k 为常数），试证明：若 $f(a)<0$，则方程 $f(x)=0$ 在 $(a,+\infty)$ 中有唯一实根。

证：(1°) ∵ $f(x)$ 在 $[a,x]\subset[a,+\infty)$ 中满足 Lagrange 中值定理，⇒

$\exists\,\xi\in(a,x)$ 使 $f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a)\ge k(x-a)$ ⇒

$f(x)\ge f(a)+k(x-a)\longrightarrow+\infty\ (x\to+\infty)$ ⇒ $\exists\, b>a$，使 $f(b)>0$，

在 $[a,b]$ 上对 $f(x)$ 应用零值定理（∵ $f\in C[a,b]$ 且 $f(a)f(b)<0$）知

$\exists\, x_0\in(a,b)\subset(a,+\infty)$ 使 $f(x_0)=0$，即 $f(x)=0$ 在 $(a,+\infty)$ 中至少有一个实根 x_0；

(2°). 由 $f'(x)>0$，$\forall x\in(a,+\infty)$ 知，$f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 中严格单增，⇒ $f(x)$ 与 x 轴至多有一个交点，即方程 $f(x)=0$ 在 $(a,+\infty)$ 中至多有一个实根。故由 (1°),(2°) 知，方程 $f(x)=0$ 在 $(a,+\infty)$ 中有唯一实根 x_0.

（注：若改为当 $x>a$ 时，$f'(x)>0$ 则结论可不成立，如 $f(x)=-\frac{1}{x}$，$x\in[1,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{x^2}>0$，$f(1)=-1$，$f\in C$ 但 $f(x)=-\frac{1}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 中无实根）

(2) 利用函数的凹凸性证明平均值不等式

$$\left(\frac{x_1^{-1}+x_2^{-1}+\cdots+x_n^{-1}}{n}\right)^{-1}\le\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\le\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\le\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}}$$

$\forall x_1,x_2,\cdots,x_n\in(0,+\infty)$，等号成立，当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$

证：取 $f(x)=\ln x,\ x\in(0,+\infty)$，则 $f'(x)=\frac{1}{x}$，$f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$

恒成立，$\forall x\in(0,+\infty)$ $\because f(x)=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上严凹，对 $\forall x_1,x_2,\cdots$

$x_n\in(0,+\infty)$，$\forall\ 0<\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n<1$ 且 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$，不等式：

$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n)\geqslant\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\cdots+\lambda_nf(x_n)$ 恒成立，

特别地，当 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=\frac{1}{n}$ 时，也成立，$f(\frac{1}{n}x_1+\frac{1}{n}x_2+\cdots+\frac{1}{n}x_n)\geqslant\frac{1}{n}f(x_1)+$

$\frac{1}{n}f(x_2)+\cdots+\frac{1}{n}f(x_n)\Longrightarrow\ln\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\geqslant\frac{1}{n}(\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n)=\ln\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$

$\Longrightarrow\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$，而 $x_1^{-1},x_2^{-1},\cdots,x_n^{-1}\in(0,+\infty)$，$\therefore$ 有

$\sqrt[n]{x_1^{-1}x_2^{-1}\cdots x_n^{-1}}\leqslant\frac{x_1^{-1}+x_2^{-1}+\cdots+x_n^{-1}}{n}\Longleftrightarrow\left(\frac{x_1^{-1}+x_2^{-1}+\cdots+x_n^{-1}}{n}\right)^{-1}\leqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$

从而 $\left(\frac{x_1^{-1}+x_2^{-1}+\cdots+x_n^{-1}}{n}\right)^{-1}\leqslant\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$

另外，由 Cauchy 不等式：$(x_1\cdot1+x_2\cdot1+x_n\cdot1+\cdots+x_n\cdot1)^2\leqslant(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(1^2+1^2+\cdots$

$+1^2)\leqslant(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)n\Longrightarrow\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\leqslant\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\,\frac{\sqrt{n}}{n}\Longrightarrow$

$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\leqslant\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}}\triangleq$ RMS (root mean square)，即

$\overline{H}\leqslant\overline{G}\leqslant\overline{A}\leqslant$ RMS.