第24讲：第一换元积分法（即"凑微分法"）

(一) 原理与基本积分公式（15个）：

(1). 设 $F'(u)=f(u)$, $u\in I$, 则 $dF(u)=F'(u)du=f(u)du$, $u\in I$.

u是自变量或中间变量，这即一阶微分形式不变性。

(2). 依一阶微分形式不变性，无论u是自变量还是中间变量，有下列15个基本积分公式：(其中，C是积分常数)

(1) $\int 0\,du=C$; (2) $\int e^u du=e^u+C$, (3) $\int a^u du=\frac{a^u}{\ln a}+C$ $(a>0, a\neq 1)$

(4). $\int u^\alpha du=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$, $(\alpha\neq -1)$ (5) $\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C$, (6) $\int\cos u\,du=\sin u+C$

(7). $\int\sin u\,du=-\cos u+C$, (8) $\int\sec^2 u\,du=\tan u+C$, (9) $\int\csc^2 u\,du=-\cot u+C$

(10). $\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\arcsin u+C$ (11). $\int\frac{du}{1+u^2}=\arctan u+C$, (12) $\int \mathrm{ch}\,u\,du=\mathrm{sh}\,u+C$

(13) $\int \mathrm{sh}\,u\,du=\mathrm{ch}\,u+C$, (14) $\int\sec u\tan u\,du=\sec u+C$,

(15) $\int\csc u\cot u\,du=-\csc u+C$

(3). 设 $F'(x)=f(x)$, $G'(x)=g(x)$, $\forall x\in I$ 且 C_1, C_2 为任意常数，$C_1^2+C_2^2\neq 0$, 则

$$\int(C_1f(x)+C_2g(x))dx=C_1\int f(x)dx+C_2\int g(x)dx=C_1F(x)+C_2G(x)+C \quad (1)$$

即不定积分具有线性性质，但要求 $C_1^2+C_2^2\neq 0$.

理由：当 $C_1=C_2=0$ 时，左边 $=\int(0+0)dx=\int 0dx=C$，而右边 $=0\cdot\int f(x)dx+0\cdot\int g(x)dx=0$，然而常数 $C=0$ 矛盾！∴要求 $C_1^2+C_2^2\neq 0$。

(三) 求下列不定积分 I

(1) $\int \sin^2 x dx$；(2) $\int \sin^3 x dx$；(3) $\int \sin^4 x dx$，(4) $\int (ax+b)^\alpha dx$，($a\neq 0$，a,b,α 为常数)。(5) $\int\frac{dx}{x^2-x-6}$；(6) $\int\frac{xdx}{x^2-x-6}$，(7) $\int\frac{x^2dx}{x^2-x-6}$

(8) $\int\frac{x^3dx}{x^2-x-6}$，(9) $\int\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}dx$，(10) $\int\frac{dx}{x^2-a^2}$，(11) $\int\frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}dx$.

解(1)：$I_1=\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int 1dx-\frac{1}{2^2}\int\cos 2x\,d(2x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+C$

解(2)：$I_2=-\int(1-\cos^2 x)d\cos x=-\int d\cos x+\int\cos^2 x\,d\cos x=-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+C$

解(3)：$I_3=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2dx=\frac{1}{4}\int 1dx-\frac{1}{2}\int\cos 2x dx+\frac{1}{4}\int\cos^2 2x dx$

$=\frac{x}{4}-\frac{1}{4}\int\cos 2x\,d(2x)+\frac{1}{4}\int\frac{1+\cos 4x}{2}dx=\frac{x}{4}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{x}{8}+\frac{1}{8\times 4}\int\cos 4x\,d(4x)$

$=\frac{3x}{8}+\frac{1}{32}\sin 4x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$

解(4)：当 $\alpha\neq -1$ 时，$I_4=\frac{1}{a}\int(ax+b)^\alpha d(ax+b)=\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$

当 $\alpha=-1$ 时，$I_4=\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\int\frac{d(ax+b)}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C$

解(5): $I_5=\int\frac{dx}{(x-3)(x+2)}=\frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\frac{1}{5}\int\frac{d(x-3)}{x-3}-\frac{1}{5}\int\frac{d(x+2)}{x+2}$

$$=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right|+C=\frac{1}{3-(-2)}\ln\left|\frac{x-3}{x-(-2)}\right|+C.$$

解(6): $I_6=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-x-6)}{x^2-x-6}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x-6}=\frac{1}{2}\ln|x^2-x-6|+\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right|+C$

解(7): $I_7=\int\frac{(x^2-x-6)+x+6}{x^2-x-6}dx=\int 1dx+\int\frac{x\,dx}{x^2-x-6}+6\int\frac{dx}{x^2-x-6}$

$$=x+I_6+6I_5$$

$$=x+\frac{1}{2}\ln|x^2-x-6|+\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right|+\frac{6}{5}\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right|+C$$

$$=x+\frac{1}{2}\ln|x^2-x-6|+\frac{7}{5}\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right|+C.$$

解(8). $I_8=\int\frac{(x^3-x^2-6x)+x^2+6x}{x^2-x-6}dx=\int x\,dx+\int\frac{x^2dx}{x^2-x-6}+6\int\frac{x\,dx}{x^2-x-6}$

$$=\frac{x^2}{2}+I_7+6I_6=\frac{x^2}{2}+\left(x+\frac{1}{2}\ln|x^2-x-6|+\frac{7}{5}\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right|\right)+6\left(\frac{1}{2}\ln|x^2-x-6|+\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right|\right)+C$$

$$=x+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln|x^2-x-6|+\frac{13}{5}\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right|+C.$$

解(9). $I_9=\int\frac{(1+\frac{1}{x^2})}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}dx=\int\frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+1}=\arctan(x-\frac{1}{x})+C$

解(10) $I_{10}=\int\frac{dx}{(x-a)(x+a)}=\frac{1}{a-(-a)}\left(\int\frac{d(x-a)}{x-a}-\int\frac{d(x+a)}{x+a}\right)=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$

解(11): $I_{11}=\int\frac{1-x^{-2}}{x^2+1+x^{-2}}dx=\int\frac{d(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-1}=\frac{1}{1-(-1)}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-1}{x+\frac{1}{x}+1}\right|+C$

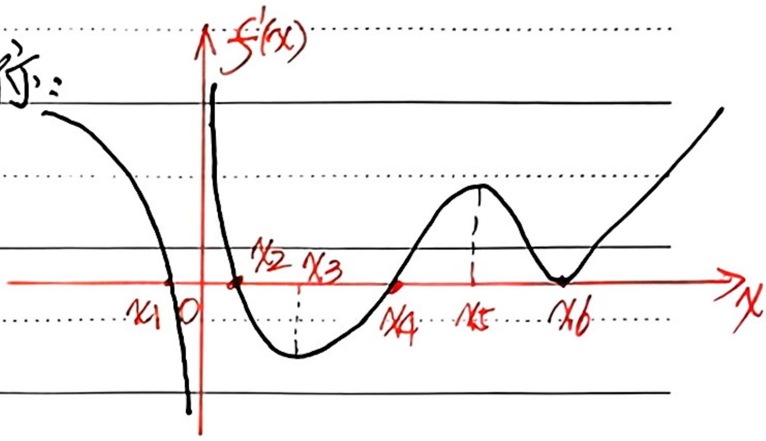
$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right|+C$$

(3).

(三)综合复习:

例1. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$中C, 在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$中$f'(x)$存在且C,

且已知$f'(x)$的图形如右图所示:



则$y=f(x)$的驻点、极值点、

拐点个数分别是几个?

解(1) 驻点即$f'(x)=0$的根有x_1, x_2, x_4, x_6 4个;

(2) x_1, x_2是$f(x)$的极大值点; $x=0$, x_4是$f(x)$的极小值点, 共4个极值点;

(3) $f'(x)$在$(-\infty,0)$, $(0,x_3)$中单减 $\Rightarrow$ $(-\infty,0)$, $(0,x_3)$是$f(x)$的凹区间.

在(x_3,x_5)上, $f'(x)$单增, (x_3,x_5)是$f(x)$的凸区间, $\Rightarrow$ x_3是$f(x)$的拐点;

在(x_5,x_6)上, $f'(x)$单减, $\Rightarrow$ (x_5,x_6)是$f(x)$的凹区间 $\Rightarrow$ x_5是$f(x)$的拐点,

在$(x_6,+\infty)$上, $f'(x)$单增 $\Rightarrow$ $(x_6,+\infty)$是$f(x)$的凸区间 $\Rightarrow$ x_6是$f(x)$的拐点.

即$f'(x)$的极值点, 都是$f(x)$的拐点 共3个。

例2. 讨论方程: $\ln x=\alpha x$ 实根的存在性与分布 (α为常数)

解: 令$f(x)=\ln x-\alpha x$, $x\in(0,+\infty)$. 则$f'(x)=\frac{1}{x}-\alpha$, $f''(x)=-\frac{1}{x^2}$

(开)

(1) 若 $a<0$ 时，$f'(x)=\frac{1}{x}-a>0$ 恒成立，∴ $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单增。

且 $f(0+0)=-\infty$，$f(+\infty)=+\infty$ $\Rightarrow \exists\ [x_1,x_2]\subset(0,+\infty)$ 使 $\begin{cases} f(x_1)<0 \\ f(x_2)>0 \end{cases}$

在 $[x_1,x_2]$ 对 C 函数 $f(x)=\ln x-ax$ 应用零值性定理知，至少有一点

$x_0\in(x_1,x_2)\subset(0,+\infty)$ 使 $f(x_0)=0$，又 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单增，$f(x)$ 图像与

x 轴有且只有一个交点，故 $a<0$ 时，方程 $f(x)=0$ 即 $\ln x=ax$ 在 $(0,+\infty)$

中恰好有一个实根。

(2) 若 $a=0$ 时，方程 $\ln x=0x=0$ 在 $(0,+\infty)$ 恰好有一个实根 $x_0=1$.

(3) 若 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0 \Rightarrow x_0=\frac{1}{a}$ 是驻点，且 $f''(x_0)=-a^2<0$

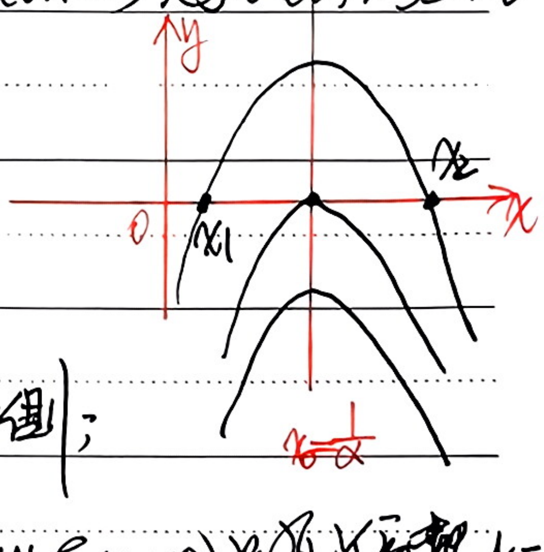
$\Rightarrow f(x_0)=f(\frac{1}{a})=\ln\frac{1}{a}-1=-(\ln a+1)$ 是 $f(x)$ 在开区间 $(0,+\infty)$ 上的

唯一极大值且无极小值，故 $f(x_0)=-(\ln a+1)$ 是 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的

最大值。(i) 若 $-(\ln a+1)>0$ 即 $0<a<\frac{1}{e}$

则从 $\begin{cases} f(0+0)=-\infty \\ f(+\infty)=-\infty \end{cases}$ 知方程 $\ln x=ax$

在 $(0,+\infty)$ 中有两个实根，分布在 $x_0=\frac{1}{a}$ 两侧；



(ii) 若 $-(\ln a+1)=0 \Rightarrow a=\frac{1}{e}$，则 $\ln x=ax$ 在 $(0,+\infty)$ 只有一个实根 $x_0=\frac{1}{a}$.

(iii) 若 $-(\ln a+1)<0 \Rightarrow a>\frac{1}{e}$，则 $\ln x=ax$ 在 $(0,+\infty)$ 中无实根。

例3. 求由方程 $x^2+xy+y^2=3$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的极值。

解(1). 方程两边对 x 求导：$2x+1\cdot y+xy'(x)+2yy'(x)=0$

$\Rightarrow y'(x)=-\frac{2x+y}{x+2y}$，令 $y'(x)=0 \Rightarrow y=-2x$ 代入原方程：

$x^2+x(-2x)+(-2x)^2=3 \Rightarrow 3x^2=3 \Rightarrow x_1=-1, x_2=1$. 即 $\begin{cases} x_1=-1 \\ y_1=+2 \end{cases}$, $\begin{cases} x_2=+1 \\ y_2=-2 \end{cases}$.

又 $y''(x)=-\frac{(2+y'(x))(x+2y)-(1+2y'(x))(2x+y)}{(x+2y)^2} \Rightarrow y''(-1)=-\frac{2}{3}<0$,

$y''(+1)=\frac{2}{3}>0$, ∴ $y(-1)=+2$ 为极大值, $y(+1)=-2$ 为极小值。

(注：将 $x=-1$ 代入 $y''(x)$ 时，利用 $y=-2x \Rightarrow 2x+y=0$, $2y=-4x=4$, $y'(-1)=0$)

(四)作业：eX4.1 2/(6),(7),(8); 3/(2); 4/(1), 7/(2),(3),(22).

注："凑公式法"又称为"凑微分法"

improvising differentiation —— 凑微分法

思考题，计算下列不定积分：

(1). $\int \frac{dx}{x^4+1}$，(2). $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx$，(3). $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$