第23讲：函数的不定积分 (indefinite integral)

(一) 函数 $f(x)$ 的原函数与不定积分的概念：

(1) 设 $f(x)$ 是区间 I 上的已知函数，若存在 I 上的可微函数 $F(x)$，使 $F'(x)=f(x)$ 或 $dF(x)=f(x)dx$，$x\in I$，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数(original function)。

例1. $f(x)=\sin x$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个已知函数，在 $(-\infty,+\infty)$ 上存在可微函数 $F(x)=-\cos x$，使 $F'(x)=(-\cos x)'=\sin x=f(x)$，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$。故 $F(x)=-\cos x$ 是 $f(x)=\sin x$ 在 $I=(-\infty,+\infty)$ 上的一个原函数。

例2. 设 $f(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 定义在 $I=(-\infty,+\infty)$ 上，且存在 I 上的可微函数 $F(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 使 $F'(x)=f(x)$，$\forall x\in I$。因此，在 $(-\infty,+\infty)$ 上已知且有第二类间断点的 $f(x)$，在 $(-\infty,+\infty)$ 上有原函数 $F(x)$。(这未必成立!)

关于原函数有下述两个基本定理：

Th1：依 Darboux Th 知，凡是在区间 I 上具有第一类间断点的函数 $f(x)$，在 I 上都不可能存在原函数。

例3、设 $f(x)=[x]$，$x\in(-2,3)$，则 $f(x)$ 在 $I=(-2,3)$ 中有4个第一类间断点：$x_1=-1$，$x_2=0$，$x_3=1$，$x_4=2$。因此，$f(x)=[x]$ 在 $I=(-2,3)$ 上不可能有原函数。

Th2：凡是在区间 I 上连续的函数 $f(x)$，都在 I 上具有原函数：$F(x)\triangleq\int_a^x f(t)dt$，$a,x\in I$，$a$ 是 I 中任意取定的一点。（待证）

那么，凡是在区间 I 上不连续的函数 $f(x)$，是否都无原函数呢？从上述例2可知，在 I 上有第二类间断点的函数 $f(x)$，也可能有原函数 $F(x)$。

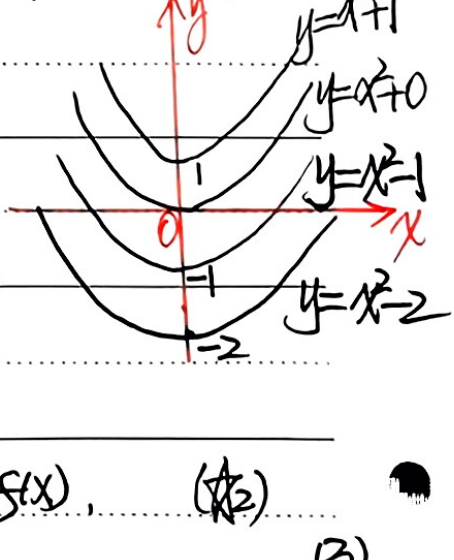
设 $G(x)$，$F(x)$ 都是 $f(x)$ 在 I 上的原函数，则 $(G(x)-F(x))'=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)\equiv0$，$\forall x\in I$，$\Leftrightarrow G(x)-F(x)\equiv C$，$\forall x\in I\Rightarrow G(x)=F(x)+C$，即 $f(x)$ 在 I 上的任意两个原函数最多相差一个常数。

(2)、若已知$F(x)$是$f(x)$在区间I上的一个原函数，即$F'(x)=f(x)$，$\forall x\in I$，则对于任意的常数C，$F(x)+C$也是$f(x)$在I上的原函数，且$f(x)$在I上的任意一个原函数都可表示为$F(x)+C$的形式。因此，$F(x)+C$是$f(x)$在I上原函数的全体构成的集合。称$f(x)$的全体原函数为$f(x)$的不定积分，记作$\int f(x)dx$，即有：

$$\int f(x)dx=F(x)+C，C为任意常数 \quad (式1)$$

称$f(x)$为被积函数，$f(x)dx=dF(x)$为被积表达式，$\int$为积分号，C为积分常数，$y=F(x)+C$为积分曲线。

例4. $\int 2x\,dx=x^2+C$，$f(x)=2x$，$F(x)=x^2$，积分曲线为$y=x^2+C$是一族抛物线。



关于不定积分，有下面的几个基本性质：

性质(1)：设$F'(x)=f(x)$，$x\in I$，则

$$\left(\int f(x)dx\right)'=(F(x)+C)'=F'(x)+(C)'=f(x)+0=f(x), \quad (式2)$$

(先积分再求导等于不积分不求导)

性质(2)：设 $F'(x)=f(x)$ $x\in I$，则

$$d\left(\int f(x)dx\right)=d(F(x)+C)=(F(x)+C)'dx=(F'(x)+0)dx=f(x)dx. \quad (★3)$$

(先积分再微分，等于不积分也不微分)

(★2)或(★3)都表明，求导运算或微分运算是不定积分运算的逆运算。

性质(3)：$\int F'(x)dx=\int f(x)dx=F(x)+C$ (★4)

(先求导再积分，等于不求导不积分但相差个常数！)

性质(4) $\int dF(x)=\int F'(x)dx=\int f(x)dx=F(x)+C$ (★5)

(先微分再积分，等于不微分不积分，但相差个常数！)

性质(5)：设 $F'(x)=f(x)$，$G'(x)=g(x)$，$x\in I$，C_1, C_2 为任意常数，且 $C_1^2+C_2^2\neq 0$，则 $\int (C_1 f(x)+C_2 g(x))dx=C_1\int f(x)dx+C_2\int g(x)dx$

(即线性组合的不定积分，等于不定积分的线性组合)

证性质(5)：只要证明 $d\left(C_1\int f(x)dx+C_2\int g(x)dx\right)=(C_1 f(x)+C_2 g(x))dx$

$\because$ 左边 $=C_1 d\left(\int f(x)dx\right)+C_2 d\left(\int g(x)dx\right)=C_1 f(x)dx+C_2 g(x)dx=(C_1 f(x)+C_2 g(x))dx$

$=$ 右边，$\therefore$ 性质(5)成立，且可推广到任意有限项：

即设 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ 在 I 上都有原函数，且 $C_1, C_2, \cdots$

C_n 是任意 n 个不全为零的常数：$C_1^2+C_2^2+\cdots+C_n^2\neq 0$，则必有：

$\int(C_1f_1(x)+C_2f_2(x)+\cdots+C_nf_n(x))dx = C_1\int f_1(x)dx+C_2\int f_2(x)dx+\cdots+C_n\int f_n(x)dx$.

此即不定积分的线性性质。

(三) 不定积分基本公式 (15个)

根据一阶微分形式不变性，若 $dF(u)=F'(u)du=f(u)du$，则

$\int f(u)du = F(u)+C$，不论 u 是自变量，还是中间变量都成立。

(1). $\int 0du = C$，(2) $\int e^u du = e^u+C$，(3). $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a}+C$；

(4) $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$ $(\alpha\neq -1)$；(5) $\int\frac{du}{u} = \ln|u|+C$，(6). $\int \sin u du = -\cos u+C$

(7). $\int \cos u du = \sin u+C$，(8). $\int \sec^2 u du = \tan u+C$，(9). $\int \csc^2 u du = -\cot u+C$，

(10). $\int \sec u\tan u du = \sec u+C$，(11). $\int \csc u\cot u du = -\csc u+C$，

(12). $\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u+C = -\arccos u+C$，

(13). $\int\frac{du}{1+u^2} = \arctan u+C = -\operatorname{arccot} u+C$，(14) $\int \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u+C$

(15). $\int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u+C$。

(三) 求下列不定积分:

(1) $\int (3x+4)^{10} dx$; (2) $\int \frac{\ln x}{x} dx$; (3) $\int \cot^2 u\, du$, (4) $\int \frac{dx}{x^2+5x+6}$

(5) $\int \frac{dx}{x^2+2x+6}$; (6) $\int a^{4x} dx \ (a>0, a\neq 1)$, (7) $\int \cos 8x\, dx$, (8) $\int \sqrt{3x+5}\, dx$

解(1): 原式 $=\frac{1}{3}\int (3x+4)^{10} d(3x+4) = \frac{1}{3}\left(\frac{(3x+4)^{11}}{11}+C_1\right) = \frac{(3x+4)^{11}}{33}+C$.

$C=\frac{C_1}{3}$, (如果用二项式定理展开后,再积分亦可,但有点繁!)

解(2): 原式 $=\int \ln x\, d\ln x = \int (\ln x)^1 d\ln x = \frac{(\ln x)^2}{2}+C$;

解(3): 原式 $=\int (\csc^2 u - 1) du = \int \csc^2 u\, du - \int 1\, du = -\cot u - u + C$

解(4): 原式 $=\int \frac{dx}{(x+2)(x+3)} = \int \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) dx = \int \frac{d(x+2)}{x+2} - \int \frac{d(x+3)}{x+3}$

$= \ln|x+2| - \ln|x+3| + C = \ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right| + C$,

解(5): 原式 $=\int \frac{dx}{(x+1)^2+(\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2}\int \frac{d\left(\frac{x+1}{\sqrt{5}}\right)}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{5}} + C$,

解(6): 原式 $=\frac{1}{4}\int a^{4x} d(4x) = \frac{1}{4}\left(\frac{a^{4x}}{\ln a}+C_1\right) = \frac{a^{4x}}{4\ln a}+C$, $(C=\frac{C_1}{4})$

解(7): 原式 $=\frac{1}{8}\int \cos 8x\, d(8x) = \frac{1}{8}(\sin 8x + C_1) = \frac{1}{8}\sin 8x + C$, $(C=\frac{C_1}{8})$

解(8): 原式 $=\frac{1}{3}\int (3x+5)^{\frac{1}{2}} d(3x+5) = \frac{1}{3}\frac{(3x+5)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{9}(3x+5)^{\frac{3}{2}} + C$

(四). 复习微积分学内容的例子:

例1. 求最大的数 α 与最小的数 β, 使 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha} \le e \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\beta}$,

$\forall n\in N^*$. 成立。

解: 设函数 $f(n)$ 由方程 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+f(n)}=e$ 而确定, 则得

$f(n)=\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-n$, $n\in N^*$, 求出 $f(n)$ 在 N^* 上的下确界 α, 与上

确界 β. 则 α 是 $f(n)$ 下界中的最大者, β 是 $f(n)$ 上界中的最小者。

为此, 令 $g(t)=\frac{1}{\ln(1+t)}-\frac{1}{t}$, $t\in(0,1]$. 则 $g'(t)=\frac{(1+t)\ln^2(1+t)-t^2}{t^2(1+t)\ln^2(1+t)}$

设 $h(t)=(1+t)\ln^2(1+t)-t^2$, $t\in(0,1]$, 则 $h'(t)=2\ln(1+t)+\ln^2(1+t)-2t$,

$h''(t)=\frac{2(\ln(1+t)-t)}{(1+t)}<0$, $t\in(0,1]$, $\Rightarrow h'(t)$ 在 $(0,1]$ 中严减 $\Rightarrow$

$h'(t)<h'(0+0)=0 \Rightarrow h(t)$ 在 $(0,1]$ 中严减, $\Rightarrow h(t)<h(0+0)=0$, $t\in(0,1]$

$\Rightarrow g'(t)<0$, $t\in(0,1] \Rightarrow g(t)$ 在 $(0,1]$ 中严减, $\Rightarrow g(t)$ 在 $(0,1]$ 中的上确

界为 $g(0+0)=\lim\limits_{t\to0^+}g(t)=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{t-\ln(1+t)}{t\ln(1+t)}=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{t-\left(t-\frac{1}{2}t^2+o(t^2)\right)}{t\cdot t}=\frac{1}{2}$;

$g(t)$ 在 $(0,1]$ 中的下确界为 $g(1)=\frac{1}{\ln 2}-1$. 显然, $t\to0^+$ 时 $n\to\infty$ 且

$t\to0^+$ 时 $g(t)\uparrow \Rightarrow n\to\infty$ 时 $f(n)\uparrow$ (严). $\Rightarrow \begin{cases} f(n)\ \text{在}\ N^*\ \text{中的上确界为}\ \frac{1}{2}, \\ f(n)\ \text{在}\ N^*\ \text{中的下确界}\ \frac{1}{\ln 2}-1, \end{cases}$

$\therefore\ \alpha=g(1)=\frac{1}{\ln 2}-1$, $\beta=g(0+0)=\frac{1}{2}$.

(7).

例12. 设 $f^{(2)}(x_0)$ 存在，求 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}$ (ch3练/13)

解法(一)：Taylor公式法：由 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$，

$\forall x\in U(x_0,\delta)$，$\Rightarrow \begin{cases} f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2}h^2+o_1(h^2) \\ f(x_0-h)=f(x_0)+f'(x_0)(-h)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2}(-h)^2+o_2(h^2) \end{cases} \Longrightarrow$

原式 $=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f^{(2)}(x_0)h^2+o_1(h^2)+o_2(h^2)}{h^2}=f^{(2)}(x_0)+0+0=f^{(2)}(x_0)$.

解法(二)：洛必达法则：原式为"$\frac{0}{0}$"型不定式.

且 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0))'_h}{(h^2)'_h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}\neq\lim\limits_{h\to 0}\frac{f''(x_0+h)+f''(x_0-h)}{2}=f''(x_0)$

$=\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}+\lim\limits_{-h\to 0}\frac{f'(x_0-h)-f'(x_0)}{-h}\right)$

$=\frac{1}{2}(f''(x_0)+f''(x_0))=f''(x_0)$.

例13. 设 $f(x)\in C^3[-1,1]$ 且 $f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$，则 $\exists\xi\in(-1,1)$ 使 $f^{(3)}(\xi)=3$. (ch3练/18)

证：由带Lagrange型余项的Taylor公式可知：对 $\forall x\in[-1,1]$，有

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(\eta)}{3!}x^3$，$\eta\in(-1,1)$. 分别取 $x=-1,1$.

$\begin{cases} f(-1)=f(0)+f'(0)(-1)+\frac{f''(0)}{2}(-1)^2+\frac{f^{(3)}(\eta_1)}{3!}(-1)^3 & (*1),\ \eta_1\in(-1,0) \\ f(1)=f(0)+f'(0)\cdot 1+\frac{f''(0)}{2}\cdot 1^2+\frac{f^{(3)}(\eta_2)}{3!}(+1)^3 & (*2),\ \eta_2\in(0,1) \end{cases}$

注意到 $f'(0)=0$，故 $f(-1)=0$，$f(1)=1$，$(*2)-(*1)$ 得：

$$1=\frac{1}{6}\left(f^{(3)}(\eta_2)+f^{(3)}(\eta_1)\right) \Leftrightarrow 3=\frac{1}{2}\left(f^{(3)}(\eta_1)+f^{(3)}(\eta_2)\right) \quad (*3)$$

由题意知，$f^{(3)}(x)\in[-1,1]$ 中 C，因此，$f^{(3)}(x)\in[-1,1]$ 上有最小值 m，

最大值 M，$\Rightarrow \begin{cases} m\le f^{(3)}(\eta_1)\le M \\ m\le f^{(3)}(\eta_2)\le M \end{cases} \Rightarrow 2m\le f^{(3)}(\eta_1)+f^{(3)}(\eta_2)\le 2M$

$\Rightarrow m\le \dfrac{f^{(3)}(\eta_1)+f^{(3)}(\eta_2)}{2}\le M$，由 C 函数的介值定理知，

$\exists \eta\in[-1,1]$，使 $f^{(3)}(\eta)=\frac{1}{2}\left(f^{(3)}(\eta_1)+f^{(3)}(\eta_2)\right)=3$.

从 $-1<\eta_1<0$，$0<\eta_2<1$，不妨设 $\eta_1<\eta_2$，则 $f^{(3)}(x)\in[\eta_1,\eta_2]\subset(-1,1)$

上 C，$f^{(3)}\in[\eta_1,\eta_2]$ 上能取最小值 m_1，最大值 M_1，$\Rightarrow \begin{cases} m_1\le f^{(3)}(\eta_1)\le M_2 \\ m_1\le f^{(3)}(\eta_2)\le M_2 \end{cases}$

$m_1\le \dfrac{f^{(3)}(\eta_1)+f^{(3)}(\eta_2)}{2}\le M_1$，由介值定理知，$\exists \xi\in[\eta_1,\eta_2]\subset(-1,1)$，使

$f^{(3)}(\xi)=\frac{1}{2}\left(f^{(3)}(\eta_1)+f^{(3)}(\eta_2)\right)=3$。（可见，从 $(*3)$ 开始，对 $f^{(3)}(x)$ 在 $[\eta_1,\eta_2]\subset(-1,1)$ 上使用介值 th，即可得到所需结论。）

五）作业：EX4.1

1/(2)，(3)，(5)；2/(3)，(4)，(5)，(9)，(10)；

ch3 综/7；18.