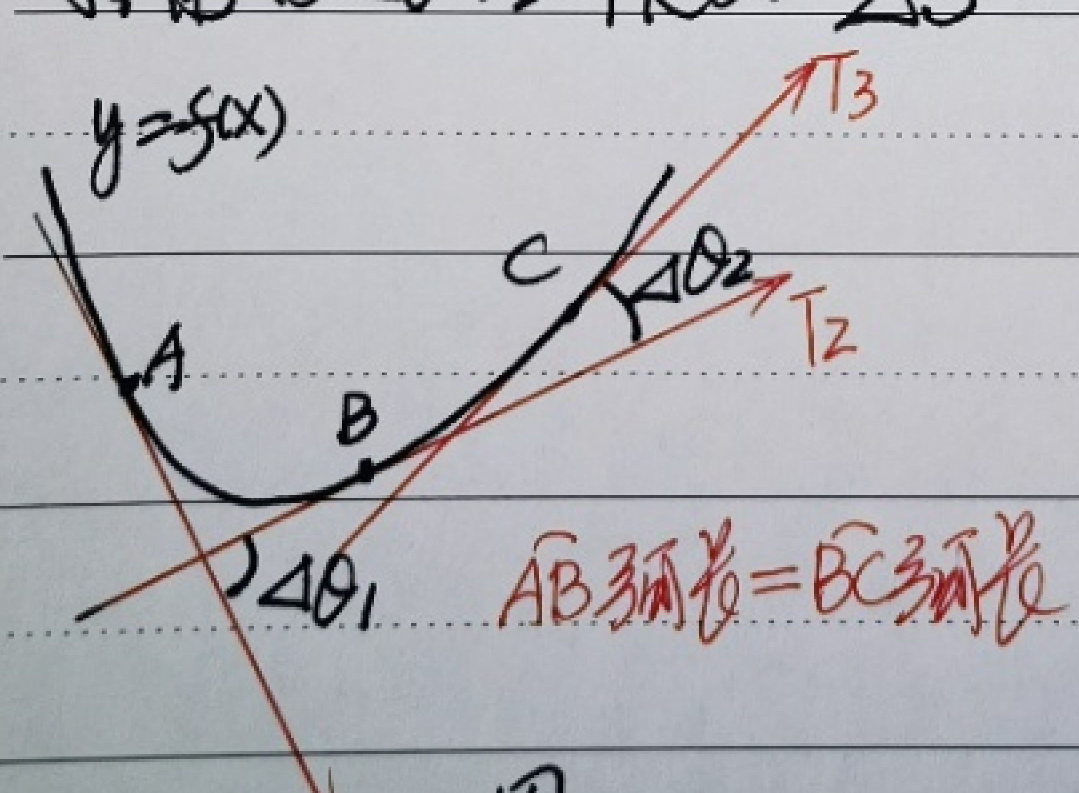
第22讲：微积分学的应用举例

(七) 曲线弯曲程度——曲率的计算：

设 $y=f(x)$ 在区间 I 上二阶可导(可微). 设曲线 L: $y=f(x)$, $x\in I$.

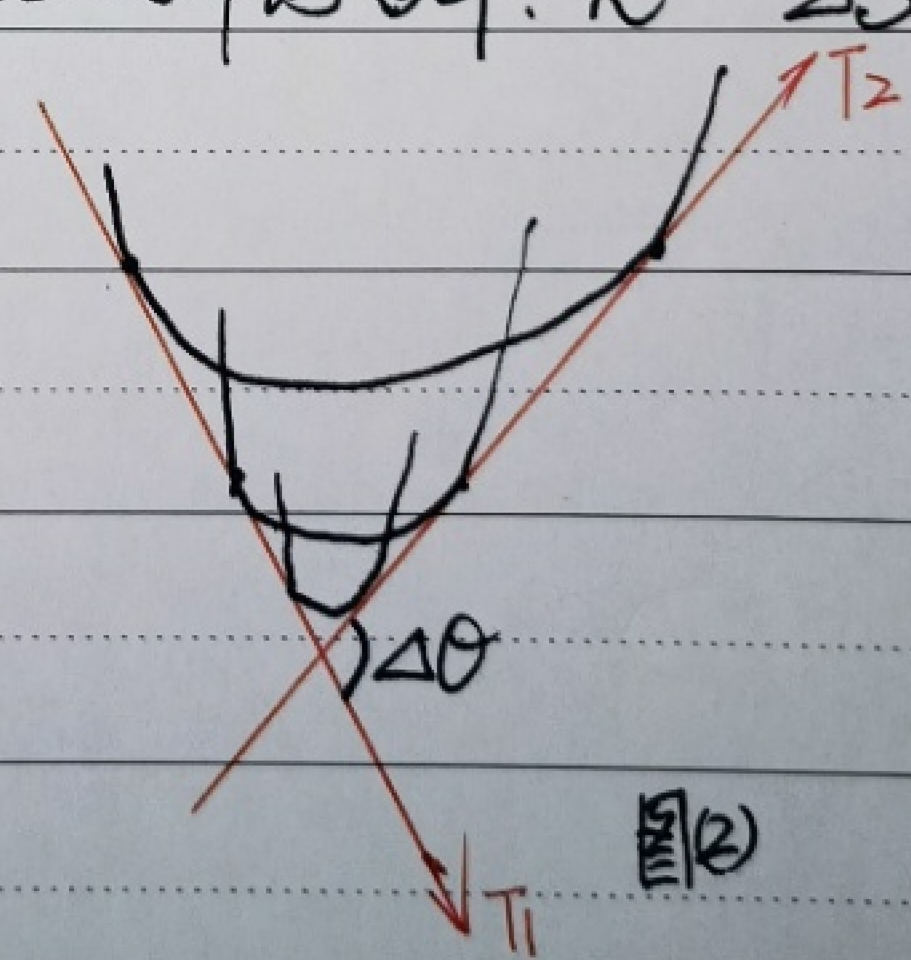
当 L 的切线从 A 点转到 B 点时, $\Delta\theta_1$ 称为相应的切线转角. $\Delta\theta_2$ 是切线从 B 点转到 C 点时的切线转角(图(1)).

显然, 在弧长相等的前提下, 转角愈大时, 相应的弧也愈弯曲, 即曲率与切线的转角大小成正比; 从图(2)知, 当切线的转角相同时, 弧长愈小的弧也愈弯曲. 即曲率与曲线弧长成反比. 设从 A 点到 B 点的弧长为 Δs, 转角为 $\Delta\theta$, 则定义 $\frac{\Delta\theta}{\Delta s}$ 为 $\overset{\frown}{AB}$ 的平均曲率: $\bar{k} \triangleq \frac{\Delta\theta}{\Delta s}$.



图(1).

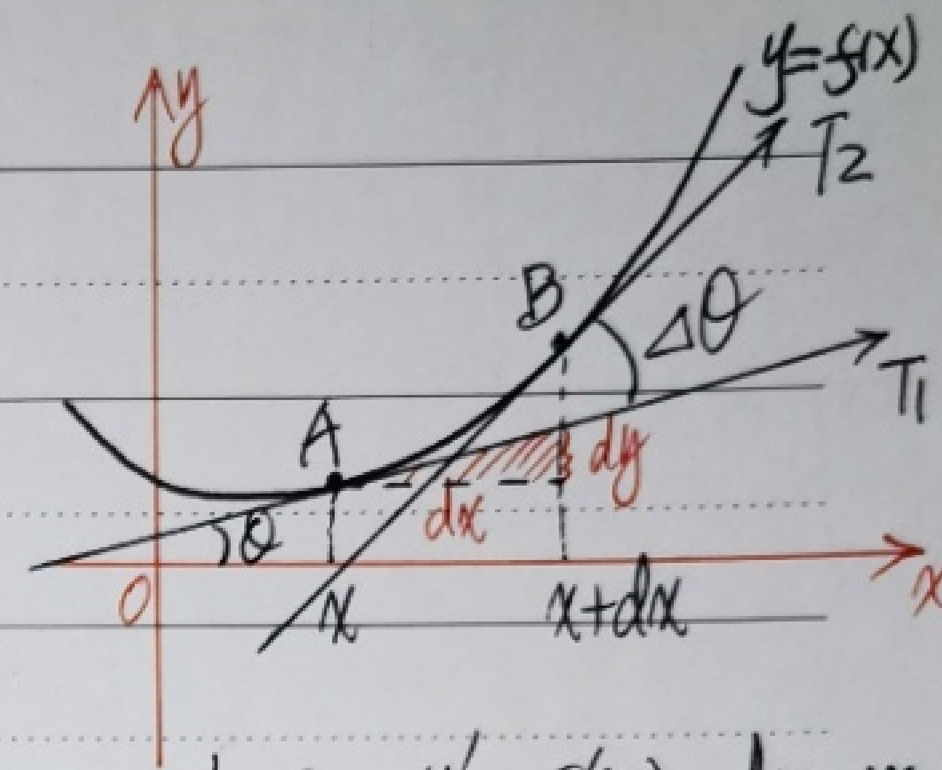
$\Delta\theta_1 > \Delta\theta_2$



图(2)

设A点为$(x, f(x))$，B点为$(x+dx, y+\Delta y)$

当$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\bar{k}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}$收敛时.



$\tan\theta=y'=f'(x)$，$dx=\Delta x\to 0$

称此极限值为曲线$y=f(x)$在

A点的曲率，记作：

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\bar{k}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}=\frac{d\theta}{ds}\qquad (式1).$$

$$由\ \tan\theta=y'=f'(x)\Rightarrow\theta=\arctan y'(x)\Rightarrow d\theta=\frac{y''(x)}{1+y'(x)^2}dx\qquad (式2)$$

$$而\ ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx\qquad (式3).$$

弧长ds的计算体现了"局部以直代曲"的微积分思想.

事实上，圆的周长计算用圆的内接正多边形周长的极限或用圆的外切正多边形周长的极限表示，也是这种"局部线性化"思想. 空中光滑曲线的弧长计算仍用这种思想。

将(式2)，(式3)代入(式1)可得：

$$k=\frac{y''(x)}{(1+y'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}\qquad (式4).$$

当$k\geq 0$时，曲线是向下弯曲的，$k\leq 0$时，曲线是向上弯曲

测，且 $|k|$ 愈大，曲线愈弯曲。

当曲线 L 是用参数方程 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ 给定的时候，

$\because y'(x)=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)dt}{x'(t)dt}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$，$y''(x)=\dfrac{d(y'(x))}{dx}=\dfrac{d(y'(x))}{dt}\dfrac{1}{\frac{dx}{dt}}$

$=\left(\dfrac{y'(t)}{x'(t)}\right)'_t\dfrac{1}{x'(t)}=\dfrac{y''(t)x'(t)-x''(t)y'(t)}{(x'(t))^3}$，代入(※4)之得：

$$k=\frac{y''(t)x'(t)-x''(t)y'(t)}{(x'^2(t)+y'^2(t))^{\frac{3}{2}}} \qquad (※5).$$

例1、计算直线 $y=f(x)=ax+b$ （a,b为常数）上各点的曲率 k。

解：$\because y'(x)\equiv a$，$y''(x)\equiv 0$，代入(※4)之得 $k\equiv 0$。

例2、计算圆 $x^2+y^2=a^2$ $(a>0)$ 上各点的曲率 k。

解法(一)：$x^2+y^2=a^2$ 两边对 x 求导：$2x+2yy'(x)=0 \Rightarrow$

$y'(x)=-\dfrac{x}{y} \Rightarrow y''(x)=-\left(\dfrac{x}{y}\right)'_x=-\dfrac{1\cdot y-y'(x)x}{y^2}=-\dfrac{y-x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2}$

$=-\dfrac{x^2+y^2}{y^3}=-\dfrac{a^2}{y^3}$，代入(※4)之得：

$$k=\frac{-\frac{a^2}{y^3}}{\left(1+\left(-\frac{x}{y}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{-\frac{a^2}{y^3}}{\frac{a^3}{\pm y^3}}=\pm\frac{1}{a}.$$

当$k=\frac{1}{a}>0$时，是下半圆上各点的曲率；$k=\frac{1}{a}<0$时，是上半圆上各点的曲率。

特别地，当半径$a\to+\infty$时，$k\longrightarrow 0$，即圆周变成了直线。因此，在复变函数中，将直线也看作是圆，是半径为无穷大的圆。

解法(2)：圆$x^2+y^2=a^2$的参数式为$\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\end{cases}$，$t\in[0,2\pi]$.

$\Rightarrow\begin{cases}x'(t)=-a\sin t\\ y'(t)=a\cos t\end{cases}$，$\begin{cases}x''(t)=-a\cos t\\ y''(t)=-a\sin t\end{cases}$ $\Rightarrow x'(t)^2+y'(t)^2=a^2$

代入(公式)可得：

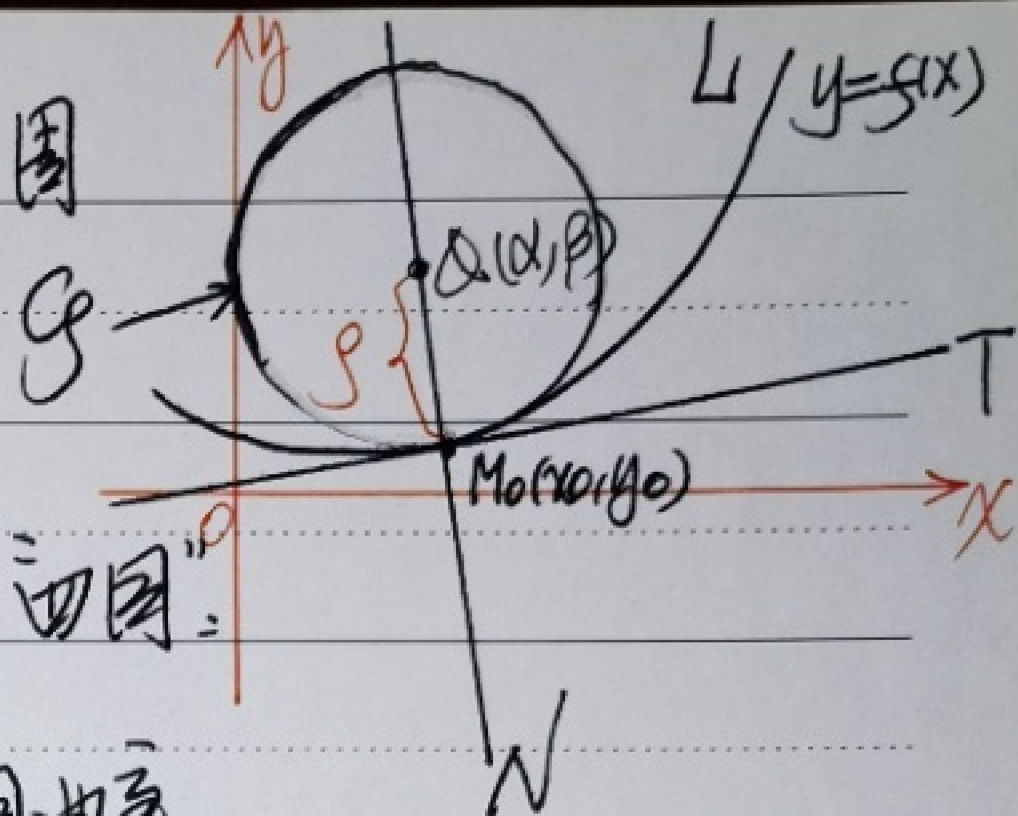
$$k(t)=\frac{(-a\sin t)(-a\sin t)-(-a\cos t)(a\cos t)}{(a^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{a^2}{a^3}=\frac{1}{a}$$

(三) 曲率圆、曲率半径ρ、曲率中心

设曲线$y=f(x)$是I上的光滑曲线，即$f(x)$在I上连续的曲线，设L为曲线$y=f(x)$，$M_0(x_0,y_0)\in L$，且$k(x_0)>0$。

过点M_0作L的法线N，在L的凹向一侧的N上取点$Q(\alpha,\beta)$，使$|QM_0|=\frac{1}{k(x_0)}$，令$\rho=\frac{1}{k(x_0)}$，则$\rho>0$。

以$Q(\alpha,\beta)$为中心，ρ为半径作圆周



C_ρ，如图所示，则圆周C_ρ与曲线$L: y=f(x)$在点$M_0(x_0,y_0)$处"有切同"：

(1) 同函数值、(2) 同切线、(3) 同曲率、

(4) 同凸向。因此，将C_ρ称为L在M_0的密切圆，在点M_0附近，可用C_ρ代替L，这样"以曲代曲"有着较好的效果。

称C_ρ为L在点M_0处的曲率圆，ρ为L在点M_0处的曲率半径，圆心$Q(\alpha,\beta)$称为L在点M_0处的曲率中心。

当点M_0沿曲线L移动时，相应的曲率中心$Q(\alpha,\beta)$的运动轨迹称为L的"渐屈线"。相对于渐屈线，原来的曲线L称之为"渐伸线"。

(三). 求曲线$L: y=f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$的极值、最值、拐点、渐近线.

解(1°) $\because f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}-0}{x}\xlongequal[\text{则}u\to\infty]{\text{令}\frac{1}{x}=u}$

$\lim\limits_{u\to\infty}\frac{u}{e^{u^2}}\xlongequal{\text{L法则}}\lim\limits_{u\to\infty}\frac{1}{2ue^{u^2}}=0$. 且$x\neq0$时, $f'(x)=$

$(e^{-\frac{1}{x^2}})'=e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{2}{x^3}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}\frac{2}{x^3}, & x\neq0\\ 0, & x=0.\end{cases}$

从$x<0$时, $f'(x)<0$, $x>0$时, $f'(x)>0\Rightarrow$且$f(x)$在$x=0$处C$\Rightarrow x<0$时

$f(0)<f(x)$, $x>0$时, $f(x)>f(0)$. $\Rightarrow f(0)=0$是$f(x)$的极小值, 且$f(x)$

在$(-\infty,+\infty)$上无极大值, 此极小值也是$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上的最小值。

(2°) $\because f''(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}\frac{2}{x^3}}{x}\xlongequal[\text{则}u\to\infty]{\text{令}\frac{1}{x}=u}$

$\lim\limits_{u\to\infty}\frac{2u^4}{e^{u^2}}=\lim\limits_{u\to\infty}\frac{8u^3}{e^{u^2}\cdot2u}=4\lim\limits_{u\to\infty}\frac{u^2}{e^{u^2}}=4\lim\limits_{u\to\infty}\frac{2u}{2ue^{u^2}}=0$.

且$x\neq0$时, $f''(x)=(e^{-\frac{1}{x^2}}\frac{2}{x^3})'=e^{-\frac{1}{x^2}}(\frac{2}{x^3})^2+e^{-\frac{1}{x^2}}\frac{-6}{x^4}$

$=e^{-\frac{1}{x^2}}\frac{2}{x^6}(2-3x^2)=e^{-\frac{1}{x^2}}\frac{2}{x^6}(\sqrt{2}-\sqrt{3}x)(\sqrt{2}+\sqrt{3}x)=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=-\sqrt{\frac{2}{3}},\\ x_2=\sqrt{\frac{2}{3}}.\end{cases}$

$\because x<-\sqrt{\frac{2}{3}}$时, $f''(x)<0$; $-\sqrt{\frac{2}{3}}<x<0$时, $f''(x)>0$; $0<x<\sqrt{\frac{2}{3}}$时,

$f''(x)>0$; $x>\sqrt{\frac{2}{3}}$时, $f''(x)<0$, 即$f''(x)$在$x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$两侧异号

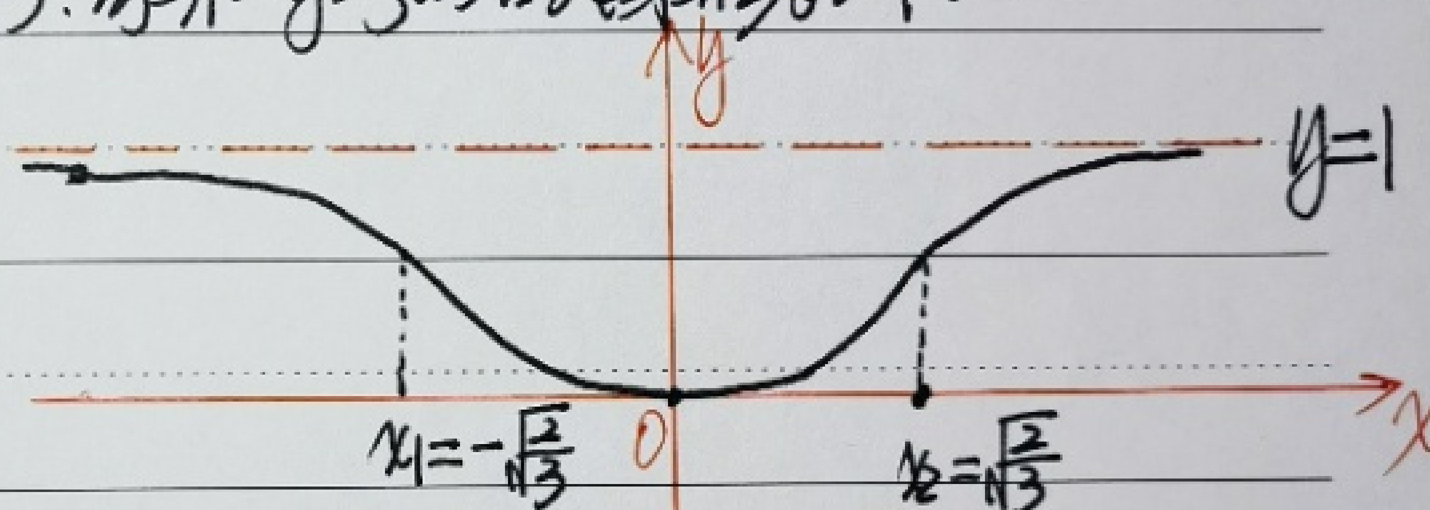
且$f(x)$在$x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$处C $\therefore x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$为拐点, $f''(\pm\sqrt{\frac{2}{3}})=0$.

虽有 $f''(0)=0$，但 $f''(x)$ 在 $x=0$ 两侧同号，∴ $x=0$ 不是 $f(x)$ 的拐点.

(3°) 若曲线 $y=f(x)$ 满足：$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=C$（常数），则称 $y=C$ 为曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线；若满足 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，则称 $x=x_0$ 是曲线 $y=f(x)$ 的铅直渐近线.

本题中，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} e^{-\frac{1}{x^2}}=e^0=1$，∴ $y=1$ 是水平渐近线.

综合上述(1°)，(2°)，(3°). 可知 $y=f(x)$ 的图形如下：



(四). 由泰勒Taylor公式可引出无穷小等价无穷小、无穷小不等式。

例1. 如 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$ ⇒

$e^x=1+x+o(x)$，$\forall x\in U(0,\delta) \Rightarrow e^x-1=x+o(x) \Rightarrow \frac{e^x-1}{x}=1+\frac{o(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \Rightarrow e^x-1\sim x$；如 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+o(x^2) \Rightarrow$

$e^x-(1+x)=\frac{x^2}{2!}+o(x^2) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-(1+x)}{\frac{1}{2}x^2}=0+1=1 \Rightarrow$

$e^x-(1+x)\sim\frac{1}{2}x^2\ (x\to 0)$；如 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$

$\Rightarrow e^x-(1+x+\frac{x^2}{2!})=\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-(1+x+\frac{x^2}{2!})}{\frac{1}{3!}x^3}=1+0=1\Rightarrow e^x-(1+x+\frac{x^2}{2!})\sim\frac{x^3}{3!},(x\to0)$

$\cdots\ e^x-(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!})\sim\frac{x^n}{n!},(x\to0),\ n=1,2,3,\cdots$

例2. 从 $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1}),\ x\in(0,\frac{\pi}{2})$

$\because \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)<x$，$\sin x=(x-\frac{x^3}{3!})+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)>x-\frac{x^3}{3!}$

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+o(x^7)<x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$，$\sin x=(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!})$
$+\frac{x^9}{9!}+o(x^9)>x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}$，$\cdots$ 故有：$x\in(0,\frac{\pi}{2})$时，

$x-\frac{x^3}{3!}<\sin x<x$；$x-\frac{x^3}{3!}<\sin x<x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$；$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}<\sin x<$
$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}$，$\cdots$

(五). "二阶微分没有形式不变性"：

(1). 设 $y=f(x)$，$x=\varphi(t)$ 皆二阶可微且 $f(\varphi(t))$ 有意义.

则 $dy=df(x)=f'(x)dx$，（x是自变量）；$dy=d(f(\varphi(t)))=(f(\varphi(t)))'_t dt$
$=f'(x)\cdot\varphi'(t)dt=f'(x)dx$（$x$是中间变量）.

(2) $d(dy)=d(f'(x)dx)=(f'(x)dx)'dx=f''(x)(dx)^2\triangleq f''(x)dx^2$.
x是自变量.

(8)

当x是中间变量时，$dy=df(g(t))=f'(x)g'(t)dt=f'(g(t))g'(t)dt$

$d(dy)=d^2y=(f'(g(t))g'(t)dt)'_t dt=[f''(g(t))(g'(t))^2+f'(g(t))g''(t)](dt)^2$

$=f''(g(t))(g'(t)dt)^2+f'(g(t))g''(t)(dt)^2$

$=f''(x)dx^2+f'(g(t))g''(t)dt^2$

显然，当且仅当$g''(t)\equiv 0$时，即$g(t)=at+b$ (a,b为常数)

时，当x是中间变量且$x=at+b$时，才有：$d^2y=f''(x)dx^2$

即"二阶微分才有形式不变性"。

当$x\neq g(t)=at+b$时，d^2y不再具有"形式不变性"。

(六) 作业：ex3.6：1(2)；2；4；6；11；

ch3练/ 14(2)、(3)；16；ex3.5：12，13.

第23讲：函数的不定积分