目录

第 1 讲　数列极限

1.1　几个常用的记号

1. $\forall \leftarrow A \leftarrow any$: 任意给定的一个；给定后为常数

2. $\exists \leftarrow E \leftarrow exist$: 存在一个；通常不唯一

3. $\sup E$: 数集 E 的最小上界，即 E 的上确界 (supremum)

   $\sup E$ 同时满足两条件：

   (a) $\forall x \in E, x \leq \sup E$;

   (b) $\forall \varepsilon > 0, \exists\, x_0 \in E, \sup E - \varepsilon < x_0$.

4. $\inf E$: 数集 E 的最大下界，即 E 的下确界 (infimum)

   $\inf E$ 同时满足两条件：

   (a) $\forall x \in E, x \geq \inf E$;

   (b) $\forall \varepsilon > 0, \exists\, x_0 \in E, x_0 < \inf E + \varepsilon$.

例 1.1. *设* $E = \{1, 3, 5, 8\} F = (-\sqrt{3}, \pi]$, *则:*

$\sup E = 8, \inf E = 1, \sup F = \pi, \inf F = -\sqrt{3}$. *且有*

1. $\sup E = -\inf(-E)$*;*

2. $\inf F = -\sup(-F)$*;*

注记. 这里的 $-E$ 表示 E 的相反数集合，即 $-E = \{-e : e \in E\}$.

1.2　微积分或数学分析必须建立在实数系上 R 上

理由: 极限运算时微积分的最基本运算, 而有理数集合 Q 关于极限运算时不封闭的. 例如: $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n = e; \forall n \in N, (1+\dfrac{1}{n}) \in Q$, 但 $e \notin Q$.

又如,$\forall n \in N, a_n = \sum\limits_{m=1}^{n} \dfrac{1}{m^2} \in Q$, 但 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{\pi^2}{6} \notin Q$.

实数集合 R 在数轴上的点是连续不断的, 且关于极限运算时封闭的. 因此, 称实数集 R 是具有连续性. 实数集 R 的连续性也称为实数集的完备性.

描述实数集 R 连续性的公理通常有五个:

1. 确界存在原理;
2. 单调有界极限存在准则;
3. 极限存在的柯西 (Cauchy) 准则;
4. 闭区间套定理;
5. 列紧性原理, 即有界数列必有收敛子列定理.

这五个公理是互相等价的, 本课程采用" 确界存在原理" 作为实数集 R 连续性的公理.

注记. *这五条公理与课本 1.1.3 的连续性公理是等价的, 即任意一个公理都可以推导出另外四个公理. 因此这里说这五个等价命题描述了 R 的连续性.*

公理 1.2. *确界存在原理*

有上 (下) 界的非空实数集 E 必有上 (下) 确界 $\sup E(\inf E)$.

1.3 数列极限的科学定义

设数列 $\{a_n\}$ 以常数 a 为极限, 科学的定义如下:

$\forall\varepsilon>0,\exists N\in N*,\forall n>N$ 都有 $|a_n-a|<\varepsilon$ 成立, 则 $\{a_n\}$ 以常数 a 为极限, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 或 $a_n\to a(n\to\infty)$.

事实上, 所有的收敛的有理数列, 其极限点的全体即是实数集 R. 即实数集 R 是有理数列的极限值构成的.

注记. *1.Q 对极限是不封闭的; 2. 由 Q 组成的数列的极限可以是实数; 3. 由 Q 组成的数列的极限只能是实数; 4. 由 Q 组成的所有收敛数列, 他们的极限的集合, 恰好就是 R, 不多不少.*

理由如下:

对 $\forall x\in R$, 设 x 的小数表示为:$x=a_0.a_1a_2a_3\cdots$, 则有理数列:$a_0,a_0.a_1,a_0.a_1a_2,\cdots$ 当 $n\to\infty$ 时, 其极限为 x. 若 x 是有理数, 则 $a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 是有限小数或循环小数, 若 x 是无理数, 则 $a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 是无限不循环小数, 则极限点 x 是无理数.

注记. *此处 $x=a_0.a_1a_2a_3\cdots$, 其中每一个 a_i 都是一个数字, a_0 是整数部分, $a_1a_2a_3\cdots$ 是小数部分. 比如, $x=3.1415926\cdots$, 那么 $a_0=3,a_1=1,a_2=4,a_3=1,a_4=5,a_5=9,a_6=2,a_7=6,\cdots$.*

可以由 $x = a_0.a_1a_2a_3\cdots$ 构造出一个数列 $\tau_1 = a_0, \tau_2 = a_0.a_1, \tau_3 = a_0.a_1a_2, \cdots$, 说 x 为极限指的, 是 x 是数列 $\{\tau_n\}$ 的极限, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = x$.

都用 x 代指, 是因为我这里不能确定 x 是不是有限小数, 有理数还是无理数. 但是 x 是数列 $\{\tau_n\}$ 的极限是确定的.

1.4 极限存在的两个常用准则

1. 单调有界极限存在准则: 若数列 $\{a_n\}$ 单调增 (减) 且有上 (下) 界, 则 $\{a_n\}$ 收敛. 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup a_n(\inf a_n)$.

2. 夹逼准则 (即两边夹准则): 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 满足 $a_n \le b_n \le c_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

证明. 单调增有界极限存在.

设数列 $\{a_n\}$ 单调增且有上界, 由确界存在定理,$\{a_n\}$ 有上确界. 令 $\sup a_n = \beta$, 则 β 是 $\{a_n\}$ 满足以下两点:

1. $\forall n \in N, a_n \le \beta$;

2. $\forall \varepsilon > 0, \exists a_{n_0} \in \{a_n\}, \beta - \varepsilon < a_{n_0}$.

又因为 $\{a_n\}$ 单调增, 故 $\forall n > n_0, a_n \le a_{n_0} > \beta - \varepsilon$, 且 $a_n \ge \beta < \beta + \varepsilon$. 即 $|\beta - a_n| < \varepsilon$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \beta$. □

证明. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in N*, \forall n > N, |a_n - a| < \varepsilon$. 又 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in N*, \forall n > N, |c_n - a| < \varepsilon$.

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则 $\forall n > N, a_n \le b_n \le c_n$, 故 $a - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < a + \varepsilon$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$. □

例 1.3. *下列 a, b, q, c_1, c_2 皆为常数).*

1. 设 $|q| < 1$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} aq^n = 0$;

2. 设 $a > 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$;

3. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;

4. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(c_1a_n + c_2b_n) = c_1a + c_2b$. 即线性组合的极限等于极限的线性组合, 称此为极限的线性性质.

数列的极限具有线性性质, 同理函数极限也是具有线性性质的, 统称为极限的线性性质. 由极限的线性性质, 可导出微积分中绝大多数概念也具有线性性质. 如函数的导数、导数、微分、积分, 都具有线性性质.

作业. ex1.2:1(2)(4);3;4;5;6;8(5);15(1);19.

第 2 讲 数列极限的性质与应用

2.1 复习数列极限的线性性质

设 a, b, c_1, c_2 为常数且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}(c_1a_n + c_2b_n) = c_1a + c_2b = c_1\lim\limits_{n\to\infty} a_n + c_2\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

从上述极限的线性性质，不难得到以下结论：

1. 当 $c_1 = c_2 = 1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

2. 当 $c_1 = 1, c_2 = -1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

3. 当 $c_1 = k, c_2 = 0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} ka_n = k\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

4. 数列的线性性质可推广到任意有限个收敛数列的情形: 设 $a_{1n} \to a_1, a_{2n} \to a_2, \cdots, a_{mn} \to a_m$, 且 $a_1, a_2, \cdots, a_m, c_1, c_2, \cdots, c_m$ 为常数, 则
$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}(c_1a_{1n} + c_2a_{2n} + \cdots + c_ma_{mn})\\ =&c_1a_1 + c_2a_2 + \cdots + c_ma_m\\ =&c_1\lim_{n\to\infty} a_{1n} + c_2\lim_{n\to\infty} a_{2n} + \cdots + c_m\lim_{n\to\infty} a_{mn}\end{aligned}$$
对 $\forall m \in N^*$ 成立.

2.2 数列极限的" 四性"

1. 有界性: 若 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 有界, 反之未必;

2. 唯一性: 若 $\{a_n\}$ 收敛, 则其极限唯一;

3. 保号性: 若 $\{a_n\}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,$a_n \geq 0, \forall n \geq n_0$, 则必有 $a \geq 0$;

4. 保序性: 若 $a_n \to a, b_n \to b$, 且 $a_n \leq (\geq) b_n, \forall n \geq n_0$, 则必有 $a \leq (\geq) b$.

2.3 收敛数列极限的四则运算法则

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, 其中 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

证明. 仅证 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}(b \neq= 0), n \to \infty$

注意到 $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b||b_n|}$

不妨设 $b > 0$, 即 $\exists N_1, \forall n > N_1, s.t. b_n > b - \varepsilon$ (a)

取 $\varepsilon < \frac{b}{2}$, 则 $b_n > b - \varepsilon \overset{(a)}{=} \frac{b}{2}$ (b)

由 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 对 $\forall\varepsilon > 0, \exists N_2, \forall n > N_2, |b_n - b| < \varepsilon$ (c)

得 $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b||b_n|} \overset{(b)}{<} \frac{|b_n - b|}{b\frac{b}{2}} \overset{(c)}{<} \frac{\varepsilon}{\frac{b^2}{2}}$

□

2.4 例题

例 2.1. 设 $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n, n \in N^*$, 证明:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e \approx 2.7182818128$;
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e = \lim\limits_{x\to-\infty}(1 + \frac{1}{x})^x, x \in R$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e, x \in R$

例 2.2. 证明闭区间套定理: 若 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一列闭区间, 满足 $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}], n = 1, 2, \cdots$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, 则存在唯一的实数 ξ, 使得 $\xi \in [a_n, b_n], n = 1, 2, \cdots$.

注记. 闭区间套定理, 是刻画实数集 R 的连续性的五个等价公理之一.

为了纪念数学家 Euler(欧拉) 在其中的贡献, 将 $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$ 记为 e. 经计算可知,$e \approx 2.718281828$. 讲义中还证明了 e 是一个无理数, 且将以 e 为底的对数称为自然对数, 记为 $\ln x$, 即 $\ln x = \log_e x$.

作业. ex1.2: 14;15(3)(4);16;18(3);22(2)(4);CH1:3(2).

第 3 讲 数列极限习题课

3.1 习题

1. $(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}, n \in N^*$.
2. $(\frac{1}{n+1}) < \ln(1+\frac{1}{n}) < (\frac{1}{n}), n \in N^*$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$, 即 $\sqrt[n]{n!}e \sim n$.

$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n, n \in N^*$, 证明:

1. $\{a_n\}$ 收敛;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} = \ln 2$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3n+1} + \cdots + \frac{1}{3n+2n} = \ln \frac{5}{3}$;
4. $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \sim \ln n$.

3.2 关于无穷大

1. $\{a_n\} \to +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in N^*, \forall n > N, a_n > M$.
2. $\{a_n\} \to -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in N^*, \forall n > N, a_n < -M$.
3. $\{a_n\} \to \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in N^*, \forall n > N, |a_n| > M$.

3.3 Stolz 定理及其应用

定理 3.1 (Stolz 定理)**.** 设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是两个数列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, 若

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = A$$

, 其中 A 可以是有限数, 也可以是 $\pm\infty$;$\{b_n\}$ 是严格单调递增且趋于 $+\infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}.$$

注记. 完整的利用 *Stolz* 定理的过程要求先证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=A$ 极限存在并求得 A, 然后再利用 *Stolz* 定理求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$. 不过不严谨的直接写出 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$ 也是能接受的.

注记 3.2. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=\infty$ 时,*Stolz* 定理不一定成立. 反例可取 $a_n=(-1)^n, b_n=n$.

3.4 例题

例 3.3. 证明:

1. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$;
2. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\geq 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$.
3. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$.

例 3.4. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 是 m 个常数, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_1|^n+|a_2|^n+\cdots+|a_m|^n}=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_m|\}.$$

例 3.5.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\dfrac{1}{2}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}=\dfrac{1}{3}$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^4}=\dfrac{1}{4}$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}=\dfrac{1}{k+1}$.

定理 3.6. 常用的平均值不等式:

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个正数, 则有:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\leq\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}.$$

作业. ex1.2:9;13;18(5);20;22(3);23;CH1:10(1);11.

第 4 讲　实数集连续性的五个等价命题

4.1　五个等价命题

1. 确界存在原理: 有上 (下) 界的非空实数集 E 必有上 (下) 确界 $\sup E(\inf E)$.

2. 单调有界极限存在准则: 若数列 $\{a_n\}$ 单调增 (减) 且有上 (下) 界, 则 $\{a_n\}$ 收敛. 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup a_n(\inf a_n)$.

3. 闭区间套定理: 若 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一列闭区间, 满足 $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}], n = 1, 2, \cdots$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, 则存在唯一的实数 ξ, 使得 $\xi \in [a_n, b_n], n = 1, 2, \cdots$.

4. 列紧性原理: 若 $\{a_n\}$ 有界且含无穷多项, 则 $\{a_n\}$ 必有收敛子列 $\{a_{n_k}\}$.

5. 柯西 (Cauchy) 准则: 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是: 对 $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in N^*, \forall n, m > N, |a_n - a_m| < \varepsilon$.

例 4.1. *证明确界原理推连续性.*

由 $Y \neq \emptyset$, 故 X 有上界,

由确界原理, X 有上确界, 同理 Y 有下确界, 记 $c_1 = \sup X, c_2 = \inf Y$, (目标: 找到 $c, s.t. \forall a \in X, b \in Y, a \le c \le b$)

若 $c_1 \in X$, 则取 $c = c_1$.

若 $c_1 \notin X$, 则 $c_1 \in Y. c_2 \in Y \Rightarrow c = c_2; c_2 \notin Y \Rightarrow c_2 \in X, c_2 < c_1$ 这与 $\forall x \in X, y \in Y, x < y$ 矛盾.

4.2　Stolz 定理的证明

4.3　例题

例 4.2. *收敛的数列 $\{a_n\}$ 被称为"Cauchy 列"或"基本列".*

1. 设 $a_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}, n \in N^*$, 证明 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 列;

2. 设 $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}, n \in N^*$, 证明 $\{a_n\}$ 不是 Cauchy 列.

4.4 函数极限 24 种科学定义

设 x_0 为常数

$\Rightarrow$ 表示" 则有...", 在此处在 $\Leftrightarrow$ 的子语句之中.

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$
2. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x_0<x<x_0+\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$
3. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x_0-\delta<x<x_0 \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$
4. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists\delta>0,\forall 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)>M.$
5. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists\delta>0,\forall x_0<x<x_0+\delta \Rightarrow f(x)>M.$
6. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists\delta>0,\forall x_0-\delta<x<x_0 \Rightarrow f(x)>M.$
7. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists\delta>0,\forall 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)<-M.$
8. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists\delta>0,\forall x_0<x<x_0+\delta \Rightarrow f(x)<-M.$
9. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists\delta>0,\forall x_0-\delta<x<x_0 \Rightarrow f(x)<-M.$
10. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists\delta>0,\forall 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)|>M.$
11. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists\delta>0,\forall x_0<x<x_0+\delta \Rightarrow |f(x)|>M.$
12. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists\delta>0,\forall x_0-\delta<x<x_0 \Rightarrow |f(x)|>M.$
13. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists X_0>0,\forall x>X_0 \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$
14. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists X_0>0,\forall x<-X_0 \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$
15. $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists X_0>0,\forall |x|>X_0 \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$
16. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists X_0>0,\forall x>X_0 \Rightarrow f(x)>M.$
17. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists X_0>0,\forall x>X_0 \Rightarrow f(x)<-M.$
18. $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists X_0>0,\forall |x|>X_0 \Rightarrow |f(x)|>M.$
19. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists X_0>0,\forall x<-X_0 \Rightarrow f(x)>M.$
20. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists X_0>0,\forall x<-X_0 \Rightarrow f(x)<-M.$

21. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall |x| > X_0 \Rightarrow |f(x)| > M.$

22. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall |x| > X_0 \Rightarrow f(x) > M.$

23. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall |x| > X_0 \Rightarrow f(x) < -M.$

24. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall |x| > X_0 \Rightarrow |f(x)| > M.$

作业. ex1.2:17(2)(3)(4),24;CH1:3(1),7,9,10(2),11.

第 5 讲 函数极限 24 种

5.1 数列 $\{a_n\}$ 极限 4 种科学定义

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in N^*, \forall n > N, |a_n - a| < \varepsilon.$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in N^*, \forall n > N, a_n > M.$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in N^*, \forall n > N, a_n < -M.$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in N^*, \forall n > N, |a_n| > M.$

例 5.1. $\forall k \in N^*$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = +\infty$.

5.2 函数极限的 "$\varepsilon - \delta$" 定义法

定义 5.2. *设 x_0 为常数, 函数在 x_0 处的极限为 a 定义为:*

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$

若 x 从大于 x_0 的一侧趋近于 x_0, 则称为 x_0 的右极限, 记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$; 若 x 从小于 x_0 的一侧趋近于 x_0, 则称为 x_0 的左极限, 记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$.

定理 5.3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = a = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.*($x_0$ 为常数)*

定理 5.4. $\lim\limits_{x\to\infty} = a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

例 5.5. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1 + \frac{1}{x})^x = \lim\limits_{x\to-\infty}(1 + \frac{1}{x})^x = \lim\limits_{x\to\infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e.$

5.3 函数极限的四则运算法则

定理 5.6. *设 x_0, a, b, c_1, c_2 为常数, 令 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a, \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, 则:*

1. $\lim\limits_{x\to x_0}(c_1 f(x) + c_2 g(x)) = c_1 a + c_2 b$;
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = a \cdot b$; 特别地, $\lim\limits_{x\to x_0} f^2(x) = a^2$;
3. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}(b \neq 0)$.

注记 5.7. *函数极限: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \in R$ 也是有"四性", 即局部有界性, 唯一性, 保号性, 保序性.*

注记 5.8. *局部有界性的证明: 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 I, 点 $x_0 \in I$, 且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon \Leftrightarrow |f(x)| < |a| + \varepsilon$. 因此, 函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有界, 但 $f(x)$ 在整个定义域 I 内未必有界.*

5.4 3 个重要极限及其证明

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$;
2. $\lim\limits_{x\to\infty} (1 + \dfrac{1}{x})^x = e$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, & n = m; \\ 0, & n < m; \\ \infty, & n > m. \end{cases}$

作业. ex1.3:1(2)(3);2(2)(4);3(2);5(1)(2);9(3)(4);10(3);CH1:13.

第 6 讲 函数极限习题课

6.1 24 种函数极限的否定形式

设 x_0, A 为常数.

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq A \Leftrightarrow \exists\varepsilon_0 > 0, \forall\delta > 0, \exists x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| \geq \varepsilon_0$.

2. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq A \Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x, x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - A| \geq \varepsilon_0.$

3. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq A \Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x, x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - A| \geq \varepsilon_0.$

4. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq +\infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall \delta > 0, \exists x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \leq M.$

5. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq +\infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall \delta > 0, \exists x, x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) \leq M.$

6. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq +\infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall \delta > 0, \exists x, x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq M.$

7. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq -\infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall \delta > 0, \exists x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \geq -M.$

8. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq -\infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall \delta > 0, \exists x, x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) \geq -M.$

9. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq -\infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall \delta > 0, \exists x, x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) \geq -M.$

10. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq \infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall \delta > 0, \exists x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq M.$

11. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq \infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall \delta > 0, \exists x, x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x)| \leq M.$

12. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq \infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall \delta > 0, \exists x, x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x)| \leq M.$

13. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) \neq A \Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \forall X_0 > 0, \exists x, x > X_0 \Rightarrow |f(x) - A| \geq \varepsilon_0.$

14. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) \neq A \Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \forall X_0 > 0, \exists x, x < -X_0 \Rightarrow |f(x) - A| \geq \varepsilon_0.$

15. $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) \neq A \Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \forall X_0 > 0, \exists x, |x| > X_0 \Rightarrow |f(x) - A| \geq \varepsilon_0.$

16. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) \neq +\infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall X_0 > 0, \exists x, x > X_0 \Rightarrow f(x) \leq M.$

17. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) \neq -\infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall X_0 > 0, \exists x, x > X_0 \Rightarrow f(x) \geq -M.$

18. $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) \neq \infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall X_0 > 0, \exists x, |x| > X_0 \Rightarrow |f(x)| \leq M.$

19. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) \neq +\infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall X_0 > 0, \exists x, x < -X_0 \Rightarrow f(x) \leq M.$

20. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) \neq -\infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall X_0 > 0, \exists x, x < -X_0 \Rightarrow f(x) \geq -M.$

21. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) \neq \infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall X_0 > 0, \exists x, |x| > X_0 \Rightarrow |f(x)| \leq M.$

22. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) \neq +\infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall X_0 > 0, \exists x, |x| > X_0 \Rightarrow f(x) \leq M.$

23. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) \neq -\infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall X_0 > 0, \exists x, |x| > X_0 \Rightarrow f(x) \geq -M.$

24. $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) \neq \infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall X_0 > 0, \exists x, |x| > X_0 \Rightarrow |f(x)| \leq M.$

注记 6.1. *24 种函数极限的肯定形式 (科学定义) 在第 4 讲: 实数集连续性的五个等价命题的附 (3) 与附 (4) 两页中.(助教注: 即 4.4). 先写出每种极限的肯定形式, 就容易写出对应的否定形式.*

6.2 几个基本概念

(1) 以零为极限的变量称为无穷小量; 绝对值无限增大的变量称无穷大量. 常数中只有零是无穷小量, 非零无穷小与无穷大具有倒数关系.

例 6.2. $x \to 0$ 时,$\sin x, x^m(m>0), \tan x, e^x-1, 1-\cos x$ 都是无穷小量;
$n \in N^*, n \to$ 时, $n^n, n!, a^n(a>1), n^A(A>0), \ln n$ 都是无穷大量.

(2) 若函数 $f(x)$ 在 x_0 处有定义, 且 $f(x_0)=\lim_{x\to x_0} f(x)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 若 $f(x)$ 在区间 I 上每一点都连续, 则称 $f(x)$ 在 I 上连续. 当 $f(x)$ 在 x_0 处连续时, 有 $f(x_0)=f(\lim_{x\to x_0} x)=\lim_{x\to x_0} f(x)$, 即连续函数的极限与函数值可以交换次序.

(3) 幂 (x^A, A 为常量), 指数 ($a^x, a>0$), 三角函数 ($\sin x, \cos x, \tan x$), 对数函数 ($\log_a x, a>0, a\neq 1$), 指数函数 (e^x), 反三角函数 ($\arcsin x, \arccos x, \arctan x$), 双曲函数 ($\sinh x, \cosh x, \tanh x$) 等函数在其定义域内均连续.

一切基本初等函数, 在其定义域内均连续.

6.3 无穷大的大小

例 6.3. 设 a, A, m 为常数, 且 $a>1, A>0, m>0$, 证明:

1. $n^n >> n! >> a^n >> n^A >> (\ln n)^m$, 在 $n\to\infty, n\in N^*$ 时成立; 其中 $n^n >> n! \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}=+\infty$, 称为 n^n 是 $n!$ 的高阶无穷大.
2. $x^x >> a^x >> x^A >> (\ln x)^m$, 在 $x\to+\infty, x>0, x\in R$ 时成立.

6.4 例题

例 6.4. 证明:

1. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$;
2. $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$;
3. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$;

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$;

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a, a>0, a\neq 1$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^A-1}{x}=A, A\neq 0$.

7. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{x^2+3x-5}{x^2+6})^{4x}=e^{12}$.

注记. 上述例 1 $\sim$ 6 今后可作为公式直接使用, 并可记为: 当 $\to 0$ 时,

1. $\dfrac{1-\cos x}{x^2}\sim\dfrac{1}{2}$;

2. $\arcsin x\sim x$;

3. $\ln(1+x)\sim x$;

4. $l^x-1\sim x$;

5. $a^x-1\sim\ln a\cdot x$;

6. $(1+x)^A-1\sim A\cdot x$.

作业. ex1.3:4;9(1)(2);10(1)(2)(4);11(1)(2).

第 7 讲 函数连续性与无穷小 (大) 的比较

7.1 函数 $y=f(x)$ 的连续性

设 x_0 是常数,

(1) $f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=f(\lim\limits_{x\to x_0}x)$.

(2) $f(x)$ 在 x_0 处间断 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$: 称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

$f(x)$ 的间断点分类: $\begin{cases}\text{(I) } f(x_0-0), f(x_0+0) \text{ 均存在的间断点为第一类间断点;}\\ \text{(II) } f(x_0-0), f(x_0+0) \text{ 至少有一个不存在的间断点为第二类间断点.}\end{cases}$

例 7.1. 六类基本初等函数 (幂, 指数, 三角, 对数, 指数, 反三角, 双曲) 在其定义域内均连续. 如 $f(x)=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ 在 $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ 时连续, 且从 $f(\dfrac{\pi}{2}-0)=+\infty, f(\dfrac{\pi}{2}+0)=-\infty$ 可知 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处第二类间断点.

又如 $f(x)=sgnx=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x<0.\end{cases}$ 在 $x=0$ 处, $f(0-0)=-1, f(0+0)=1, f(0)=0$, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处第一类间断点.(跳跃间断点)

定理 7.2. 连续函数的和, 差, 积, 商仍是连续函数.

例 7.3. 设 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)$ 在区间 I 上连续, 且 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 为常数, 则线性组合 $c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\cdots+c_mf_m(x)$ 在 I 上连续. 这表明连续函数具有线性性.

例 7.4. 连续的函数 $y=f(x)$ 若有反函数 $x=g(y)$ 或写为 $y=g(x)$, 则反函数 $y=g(x)$ 也是连续函数. 理由: 函数与其反函数关于直线 $y=x$ 对称.

例 7.5. $y=\sin x$ 在 $[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$ 上连续且单调增, 故有反函数 $x=\arcsin y$ 在 $[-1,1]$ 上连续.

$y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上连续且单调减, 故有反函数 $x=\arccos y$ 在 $[-1,1]$ 上连续且单调减.

$y=\tan x$ 在 $(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 上连续且单调增, 故有反函数 $x=\arctan y$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且单调增.

注记. 六个反三角函数都是有界变量

例 7.6. e^x 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且单调增, 故有反函数 $x=\ln y$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续且单调增.

定理 7.7. 连续函数的符合函数仍是连续函数.

由六种基本初等函数经过有限次四则运算, 有限次符合运算的函数统称为初等函数.

定理 7.8. 一切初等函数, 包括一切基本初等函数, 在其定义域内均连续.(注: 初等函数的的定义域中若存在孤立点 x_0, 则 $f(x)$ 在 x_0 处仍是连续的.)

7.2 无穷小量的比较

设 $x \to x_0$ 时,$A(x) \to 0, \beta \to 0$ 且 $(\beta(x) = 0)$.

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{A(x)}{\beta(x)} = 0$, 则称 $A(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小, 记为 $A(x) = o(\beta(x))$; 例如 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^2 x}{x} = 0 \Rightarrow \tan^2 x = o(x)$.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{A(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, 则称 $A(x)$ 是 $\beta(x)$ 的等阶无穷小, 记为 $A(x) = O(\beta(x))$; 例如 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \sin x = O(x)$.

(3) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{A(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, 则称 $A(x)$ 是 $\beta(x)$ 的等价无穷小, 记为 $A(x) \sim \beta(x)$; 例如 $\sin x \sim x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim \tan x (x \to 0); 1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}, a^x - 1 \sim \ln a \cdot x, (1+x)^A - 1 \sim A \cdot x (x \to 0)$.

(4) 当 $x \to x_0$ 时, 若 $\exists k \in R^+$, 使得 $A(x) = O((x - x_0)^k)$, 则称 $A(x)$ 是 $(x - x_0)$ 的 k 阶无穷小

例 7.9. 当 $x \to 0$ 时, 证明: 无穷小量 $\tan x - \sin x$ 是 x 的三阶无穷小.

7.3 无穷大量的比较

设 $x \to x_0$ 时,$A(x) \to \infty, \beta \to \infty$ 且 $(\beta(x) = 0)$.

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{A(x)}{\beta(x)} = 0$, 则称 $\beta(x)$ 是 $A(x)$ 的高阶无穷大, 记为 $A(x) = o(\beta(x))$; 如当 $n \to \infty$ 时, $n! = o(n^n); e^n = o(n!); n^2 = o(n!)$.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{A(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, 则称 $\beta(x)$ 是 $A(x)$ 的等阶无穷大, 特别地当 $A = 1$ 时, 称 $A(x)$ 是 $\beta(x)$ 的等价无穷大, 记为 $A(x) \sim \beta(x)$; 如当 $n \to \infty$ 时, $1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} \sim \ln n; n \sim e\sqrt[n]{n}$.

熟练掌握个别关系式:$(\forall a > 1, A > 0, m > 0)$

$$n^n >> n! >> a^n >> n^A >> (\ln n)^m;$$

$$x^x >> a^x >> x^A >> (\ln x)^m;$$

7.4 等价代换

在积与商的极限中, 无穷小 (大) 因子可用等价无穷小 (大) 代换, 而不影响原来的极限值.

设 $x \to x_0$ 时, $A(x) \sim A_1(x), \beta(x) \sim \beta_1(x)$, 则

$$\lim_{x\to x_0} \frac{A(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{A(x)}{A_1(x)} \cdot \frac{A_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{A_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

作业. ex1.3:16;17;18.

第 8 讲 再论函数连续性及无穷小 (大) 的比较

8.1 函数极限的" 四性"

(1) 唯一性.$f(x)$ 在 x_0 处有极限, 则极限值唯一.

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A_1$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A_2$. 若 $A_1>A_2$, 则 $\epsilon=\dfrac{A_1-A_2}{2}>0$, 则 $\exists\delta_1>0,\forall x,0<|x-x_0|<\delta_1\Rightarrow|f(x)-A_1|<\epsilon$; 又 $\exists\delta_2>0,\forall x,0<|x-x_0|<\delta_2\Rightarrow|f(x)-A_2|<\epsilon$. 取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则 $\forall x,0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|A_1-A_2|<\epsilon$, 矛盾.

(2) 局部有界性.

从 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in\overline{U}(x_0,\delta)=(x_0-\delta)\cup(x_0+\delta)\Rightarrow$ $|f(x)-A|<\varepsilon\Rightarrow|f(x)|<|A|+\varepsilon,\forall x\in\overline{U}(x_0,\delta)$.

(3) 保号性.

若 $f(x)\geq 0,\forall x\in\overline{U}(x_0,\delta)$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\geq 0$.

(4) 保序性.

若 $f(x)\geq g(x)$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\geq\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

8.2 函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续的四个充要条件

1. $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x,0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$;

2. $f(x_0-0)=f(x_0)=f(x_0+0)$,i.e. $f(x)$ 在 x_0 处既左连续又右连续;

3. $f(x)=f(x_0)+A(x),A(x)\to 0(x\to x_0)$;

4. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$, 其中 $\Delta x=x-x_0,\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

8.3 几个常用的记号

$\delta>0$ 为常数, 设 $A(x)\to 0(\infty),\beta(x)\to 0(\infty),x\to x_0$.

1. 点 x_0 的 δ 邻域:$U(x_0,\delta)=\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$;

2. 点 x_0 的去心 δ 邻域:$U^*(x_0,\delta)=\{x|0<|x-x_0|<\delta\}\backslash\{x_0\}$;

3. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{A(x)}{\beta(x)}=0$, 则记为 $A(x)=o(\beta(x))$; 表示 $A(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小, 或者说 $\beta(x)$ 是 $A(x)$ 的高阶无穷大;

4. 若 $\exists M>0, s.t. |A(x)|\le M|\beta(x)|, \forall x\in U^*(x_0,\delta)$, 则记为 $A(x)=O(\beta(x))$;

   注记. 助教注: 这里的比如 $o(x)$ 表示的是函数集合 $\{f|\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x}=0\}$, 而 $O(x)$ 表示的是函数集合 $\{f|\exists M>0,\exists\delta>0,\forall x\in U^*(x_0,\delta)\Rightarrow|f(x)|\le M|x|\}$. 也就是说,$x^2=o(x), x\to 0$ 表示的实际是 $x^2\in o(x)$.

例 8.1. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{A(x)}{\beta(x)}=A\neq 0$, 则 $A(x)=O(\beta(x)), x\in U^*(x_0,\delta)$. 此时称 $A(x)$ 与 $\beta(x)$ 为同阶无穷小 (大), 且 $A(x)\sim A\beta(x), x\to x_0$.

例 8.2. 设 $a_n=\ln n, b_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}, c_n=n, d_n=\sqrt[n]{n!}$, 则 $n\to\infty$ 时,$a_n,b_n,c_n,d_n\to\infty$, 且 $a_n=o(b_n), b_n=o(c_n), c_n=o(d_n)$.

例 8.3. 当 $x\to x_0$ 时候, 证明:

1. $o(A(x))\cdot o(\beta(x))=o(A(x)\cdot\beta(x))$;

2. $O(A(x))\cdot O(\beta(x))=O(A(x)\cdot\beta(x))$;

3. $O(o(A(x)))=o(A(x))$;

4. $o(O(A(x)))=o(A(x))$.

注记. 助教注: 这里的 $o(A(x))o(\beta(x))$ 表示的是集合相乘, 即 $o(A(x))o(\beta(x))=\{fg|f\in o(A(x)), g\in o(\beta(x))\}$.

8.4 间断点

$f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续是指 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上每一点都连续, 即 $f(x)$ 在 (a,b) 的每一点都连续, 且 $f(a+0)=f(a), f(b-0)=f(b)$.

(x) 在 $[a,+\infty)$ 上连续是指 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 的每一点都连续, 且 $f(a+0)=f(a)$.

若 $f(x)$ 在 x_0 处间断, 则

1. $f(x_0-0), f(x_0+0)$ 均存在且相等 $\Leftrightarrow x_0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点;

2. $f(x_0-0), f(x_0+0)$ 均存在且不相等 $\Leftrightarrow x_0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点;

3. $f(x_0-0)=\infty, f(x_0+0)=\infty \Leftrightarrow x_0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点;

4. $f(x_0-0)=-\infty, f(x_0+0)$ 至少有一个不存在, 且 $f(x_0-0)\neq\infty, f(x_0+0)\neq\infty \Leftrightarrow x_0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点中的其它间断点.

8.5 几个特别地非初等函数的连续性

1. (1) 狄利克雷 (Dirichlet) 函数:$D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q;\\ 0, & x\in R-Q.\end{cases}$

   则 (1°) 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界, 且是周期函数, 任意一个正有理数都是 $D(x)$ 的周期, 从而 $D(x)$ 不存在最小正周期;

   (2°) $D(x)$ 在任意一点都不连续, 即 $D(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处间断;

   (3°) $g(x)=xD(x), x\in R$, 则 $g(x)$ 仅在 $x=0$ 处连续.

2. Riemann 函数:$R(x)=\begin{cases}1, & x=0;\\ \dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}(p,q\in Z, q\neq 0,(p,q)=1);\\ 0, & x\in R-Q.\end{cases}$

   则 (1°) $R(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处有定义, 有界且周期为 1;

   (2°) $R(x)$ 在任意一点 x_0 处极限为 0,i.e. $\lim\limits_{x\to x_0} R(x)=0, \forall x_0\in R$;

   (3°) $R(x)$ 在任一无理点处都连续, 在有理点处都为可去间断点.

3. $\xi(x)\triangleq\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^A}, x\in(1,+\infty)$,

   $\xi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上处处连续, 处处可微. 且 $\xi(x)\in C^\infty(1,+\infty)$,i.e. $\xi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上处处具有任意阶连续的导函数.

4. $\Gamma(x)\triangleq\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}dt, x>0$,

   $\Gamma(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续, 处处可微, 且 $\Gamma(x)\in C^\infty(0,+\infty)$.

作业. ex2.1:4,5,6(2)(4)(5),7,8,17(1)(3)(4).

第 9 讲　闭区间 $[a,b]$ 上连续函数的五大性质

9.1　一致连续性

设 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 则 $\forall x_0 \in I$, 有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\epsilon, x_0) > 0, \forall|x - x_0| < \delta|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ 恒成立.

若对 $\varepsilon > 0, \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall x_1, x_2 \in I, |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, 则称 $f(x)$ 在 I 上一致连续.

由此可见, 一直连续是比连续条件更强的连续. 凡在 I 上一致连续的函数, 必在 I 上连续, 但反之不然.

例 9.1. *证明 $f(x) = \sin x$ 在 R 中一致连续.*

例 9.2. *证明 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上连续但不一致连续.*

9.2　五大特性

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有如下五大性质:

性质 1 零值性: 若 $f(a)f(b) < 0$, 则 $\exists x_0 \in (a,b), s.t. f(x_0) = 0$. 称 x_0 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的零点.

性质 2 介值性: 若存在常数 h, 使 $f(a) < h < f(b)$, 则 $\exists x_0 \in (a,b), s.t. f(x_0) = h$.

性质 3 有界性:$\exists M > 0, s.t. |f(x)| \leq M, \forall x \in [a,b]$.

性质 4 最值性: 必 $\exists x_1, x_2 \in [a,b], s.t. f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \forall x \in [a,b]$. 称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值和最小值.

性质 5 一致连续性: 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续.

例 9.3. *证明方程 $x^7 + \epsilon^x = 3$ 在 $(0,1)$ 内存在唯一实根.*

例 9.4. *设 $f(x) \in C[a,b]$, 且 $f([a,b]) = [a,b]$, 则 $\exists x_0 \in [a,b], s.t. f(x_0) = x_0$.*

作业. ex2.2:1,2,3,5,6,7,8,9;CH2:6.

第 10 讲　函数极限连续性习题课

10.1　熟练掌握以下 6 个等价无穷小

设 $u \to 0$,

1. $\sin u \sim u$;
2. $1 - \cos u \sim \frac{u^2}{2}$;
3. $e^u - 1 \sim u$;
4. $a^u - 1 \sim \ln a \cdot u$;
5. $\ln(1+u) \sim u$;
6. $(1+ku)^A - 1 \sim Aku$.

其中 $a > 0, a \neq 1, k, A$ 为常数, 且 $kA \neq 0$.

10.2　掌握以下一批等价无穷小

设 $u \to 0, \forall m > 0$,

1. $\sin^m u \sim u^m$;
2. $(1 - \cos u)^m \sim (\frac{1}{2}u^2)^m$;
3. $(e^u - 1)^m \sim u^m$;
4. $(a^u - 1)^m \sim (\ln a \cdot u)^m$;
5. $(\ln(1+u))^m \sim u^m$;
6. $(\tan u)^m \sim u^m$;
7. $(\arcsin u)^m \sim u^m$;
8. $(\arctan u)^m \sim u^m$;
9. $(\tan u - \sin u) \sim \frac{1}{2}u^3$.

10.3 熟练掌握以下等价无穷大

$n \in N^*, x \in R^+, \forall a > 1, A > 0, m > 0,$

1. $n^n >> n! >> a^n >> n^A >> (\ln n)^m$;($n$ 充分大)

2. $x^x >> a^x >> x^A >> (\ln x)^m$;($x$ 充分大)

10.4 熟练掌握以下两个等价无穷大

n 充分大时,

1. $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \ln n$;

2. $\sqrt[n]{n!} \sim \frac{1}{e} n$.

作业. ex2.2:7,8,9,13;CH2:1,2,3,5.

第 11 讲 函数的导数与 18 个求导基本公式

11.1 导数的定义

设函数 $y = f(x)$ 在 $\overline{U}(x_0, \delta)$ 上有定义, $x + \Delta x \in \overline{U}(x_0, \delta)$. 若

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = a \in R.$$

则称常数 a 为函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处的导数 (derivative), 记为 $f'(x_0) = a$, 即 $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = a = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. 并称 $f(x)$ 在 x_0 处可导.

此时, 有 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + A(x), A(x) \to 0 (x \to x_0) \Rightarrow \Delta y = f'(x_0)\Delta x + A(x)\Delta x \to 0 (\Delta x \to 0)$. 即 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, 即 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

这即" 可导必连续", 但" 连续不一定可导".

例 11.1. *设 $f(x) = |x|$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续但不可导.*

记:$f'_-(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, f'_+(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. 分别称 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$ 为 $f(x)$ 在 x_0 处的左导数和右导数.

定理 11.2. *$f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow f'_-(x_0), f'_+(x_0)$ 均存在且相等.*

若 $f(x)$ 在区间 I 上每一点 x 处都可导, 则称 $f(x)$ 在 I 上可导, 并称 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 为 $f(x)$ 的导函数.

例 11.3. 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 求曲线 $y=f(x)$ 上点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线方程与法线方程.

切线方程:$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$;

法线方程:$y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.(设 $f'(x_0)\neq 0$)

从例 11.3知, 导数 $f'(x_0)$ 的几何意义是过切点 $M(x_0,y_0)$ 的切线的斜率.

例 11.4. 设质点的运动方程为 $s=f(t)$, 则质点在 t_0 时刻的速度 $v=f'(t_0)$. 这也是导数的物理意义.

从纯数学的角度来说,$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 是因变量的增量相对于自变量而言的相对变化率. 例如, 若 $f'(x_0)=5$, 则可认为自变量 x 在 x_0 处有 1% 的变化时, 则因变量 y 在 x_0 处有 5% 的变化. 余类推.

11.2 18 个求导基本公式

设 C,a,A 为常数,$a>0,a\neq 1$.

(1). $(C)'=0$;

(2). $(a^x)'=a^x\ln a$;

(3). $(e^x)'=e^x$;

(4). $(x^A)'=Ax^{A-1}$;

(5). $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$;

(6). $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$;

(7). $(\sin x)'=\cos x$;

(8). $(\cos x)'=-\sin x$;

(9). $(\tan x)'=\sec^2 x$;

(10). $(\cot x)'=-\csc^2 x$;

(11). $(\sec x)'=\sec x\tan x$;

(12). $(\csc x)'=-\csc x\cot x$;

(13). $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x|<1$;

(14). $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,$|x|<1$;

(15). $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$,$x\in R$;

(16). $(\mathrm{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$,$x\in R$;

(17). $(\sinh x)'=\cosh x$;

(18). $(\cosh x)'=\sinh x$.

称 $\sinh x,\cosh x$ 为双曲正弦与双曲余弦.

11.3 三大求导法则

求导的四则运算法则, 反函数的求导法则及复合函数求导法则称为" 求导三大法则". 可以证明, 在" 三大求导法则" 下, 上述 18 个基本公式可以化简为 1 个求导公式:$(e^x)' = e^x$.

作业. ex3.1:1(1),2(2),4,7(6)(8)(13),11(1),14(2)(4),15,16.

第 12 讲 求导三大法则及其应用

12.1 求导的四则运算法则

设 $u(x), v(x)$ 在 x 处可导,c_1, c_2 为常数, 则

1. $(c_1u(x) \pm c_2v(x))' = c_1u'(x) \pm c_2v'(x)$;(可推广到任意有限个函数的和差的求导) 特别地, 当 $c_1 = 1, c_2 = \pm 1$ 时, 有 $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$;

2. $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$;(可推广到任意有限个函数的积的求导)

3. $(\frac{u(x)}{v(x)})' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}, v(x) \neq 0$. 特别地, 当 $u(x) = 1$ 时, 有 $(\frac{1}{v(x)})' = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}$.

12.2 反函数求导法则

设 $y = f(x)$ 在 x 处可导, 且 $f'(x) \neq 0$, 则 $f(x)$ 在 x 处可逆, 且其反函数 $x = \varphi(y)$ 在 $y = f(x)$ 处可导, 且有 $\varphi'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$, 或者有 $\varphi'(y)f'(x) = 1, \forall x \in I$.

注记. *助教注: 一般而言, 微商是对于自变量与因变量说的, 形如 $\frac{dy}{dx}$, 而导数是对于函数说的, 形如 $f'(x)$. 如果还是模糊, 可以先放着, 等下一章学了微元之后再理解, 目前可认为微商 $\frac{dy}{dx}$ 在给出 $y = f(x)$ 关系之后与 $f'(x)$ 数值上相等.*

12.3 复合函数求导法则

设 $y = f(u), u = g(x)$ 均在 x 处可导, 则复合函数 $y = f(g(x))$ 在 x 处可导, 且有 $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

中间变量为任意有限个时, 上述结论仍成立.

例 12.1. 设 $x>0, a>0, a\neq 1$, 求 $y=x^x+x^{x^x}+a^{x^a}+x^{a^x}+x^{a^a}+a^{a^x}+a^{a^a}$ 的导数.

$$\begin{aligned} y' &= x^x(1+\ln x)+x^{x^x}(\ln x\cdot x^x(1+\ln x)+x^{x-1})+a^{x^a}(ax^{a-1}\ln a) \\ &+x^{a^x}(a^x\ln a\ln x+\frac{a^x}{x})+x^{a^a-1}a^a+a^{a^x}(a^x(\ln a)^2)+0 \end{aligned}$$

作业. ex3.1:1(4)(5)(6);2(1);3;5;7(4)(10)(16);14(1)(3).

第 13 讲　求导运算习题课

13.1　求下列函数的导数

1. $\left(x^{x^x}+a^{x^a}+x^{a^x}+x^{a^a}+a^{a^x}+a^{a^a}\right)'$
2. 设 $u(x), v(x)$ 皆可导, 且 $u(x)>0, y=u(x)^v(x)$, 求 $\dfrac{dy}{dx}$.
3. 求 $y=xe^x$ 的反函数的导数 $\dfrac{dx}{dy}$.

13.2　习题 3.1

例 13.1. 若函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导,A,β 为常数, 证明:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+Ah)-f(x_0-\beta h)}{h}=f'(x_0)(A+\beta).$$

例 13.2. 求下列函数的导数:

1. $y=\sin(\cos^5(\arctan x^3))$;
2. $y=\ln(\ln^2(\ln^3 x))$;
3. $y=\dfrac{(x+5)^2(x-4)^{1/3}}{(x+2)^5(x+4)^{1/2}}$.

例 13.3. 设 $f(x)=x^3$, 求 $f'(x^2)$ 与 $(f'(x^2))'$.

例 13.4. 设 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2}), g(x)=e^{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $(f(g(x)))', f'(g(x))$.

例 13.5. 设 $f(x)$ 处处可导, 求 $\dfrac{dy}{dx}$,

1. $y=\sin(f(\sin f(x)))$;

2. $y=f(f(f(\sin x+\cos x)))$.

例 13.6. 设 n 为正整数，考虑函数

$$f(x)=\begin{cases} x^n\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

证明：

(1) 当 $n=1$ 时,$f(x)$ 在点 $x=0$ 处不可导;

(2) 当 $n=2$ 时,$f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 但导函数在 $x=0$ 处不连续（事实上, 在这一点有第二类间断）;

(3) 当 $n\geq 3$ 时,$f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 且导函数在 $x=0$ 处连续.

例 13.7. 求函数的反函数的微商. $y=\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})$.

例 13.8. 证明: 可导的偶函数的导数为奇函数, 而可导的奇函数的导数为偶函数.

例 13.9. 证明: 可导的周期函数的导数仍是周期函数.

例 13.10. 求下列各式的和:

1. $P_n=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$;

2. $Q_n=1^2+2^2x+3^2x^2+\cdots+n^2x^{n-1}$;

3. $R_n=\cos 1+2\cos 2+\cdots+n\cos n$.

作业. ex3.1:1(2)(3);7(13)(16)(18);8;10(2)(6);11(2);14(2);CH3:1.

第 14 讲 函数 $f(x)$ 的高阶导数

14.1 高阶导数的定义, 记号与重要性质

(1) $f''(x)=(f'(x))\triangleq\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}\triangleq f^{(2)}(x)\triangleq\dfrac{d^2y}{dx^2}$;

(2) $f'''(x)=(f''(x))\triangleq\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f''(x+\Delta x)-f''(x)}{\Delta x}\triangleq f^{(3)}(x)\triangleq\dfrac{d^3y}{dx^3}$;

(3) $f^{(n)}(x)=\dfrac{d^ny}{dx^n}, n=2,3,\cdots.$

规定 $f^{(0)}(x)=f(x)$. 且二阶以上的导数称为高阶导数.

14.2 高阶导数的性质

高阶导数具有先行性质: 设 $u(x),v(x)$ 均有 n 阶导数,c_1,c_2 为常数, 则

(1) $(c_1u(x)\pm c_2v(x))^{(n)}=c_1u^{(n)}(x)\pm c_2v^{(n)}(x)$;

(2) $(u\cdot v)^{(n)}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}C_n^ku^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x)$(Leibniz 公式)$n\in N^*$,

利用其中 u,v 的对称性,leibniz 公式也可以写为:

(3) $(u\cdot v)^{(n)}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}C_n^ku^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x)$;

14.3 几个常用的高阶导数公式

(1) $(\sin x)^{(n)}=\sin(x+\dfrac{n\pi}{2})$, $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+\dfrac{n\pi}{2})$;

(2) $(e^x)^{(n)}=e^x$,$(a^x)^{(n)}=(\ln a)^na^x$;

(3) $\left(\dfrac{1}{x+a}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^nn!}{(x+a)^{n+1}}$, $(\ln(x+a))^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+a)^n}$;

(4) $$(x^m)^{(n)}=\begin{cases}0 & n<m;\\ n! & n=m;;\\ n(n-1)\cdots(n-m+1)x^{n-m} & n>m.\end{cases}$$

14.4 例题

例 14.1. $P_n(x)=\dfrac{1}{2^nn!}\left((x^2-1)^n\right)^{(n)}$. *称之为 n 阶 Legendre 多项式, 证明:$P_n(x)$ 是下列 n 阶 Legendre 方程的解: $(x^2-1)y''-2xy'+n(n+1)y=0$.*

例 14.2. *设 $f(x)=\arctan x$, 求 $f^{(n)}(x),f^{(98)}(0),f^{(99)}(0)$.*

例 14.3. *求 $f^{(n)}(x)$,*

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+6x+5}$, (2) $f(x)=(4x^2+5x+1)\cos x$.

作业. ex3.1:7(3),(12);14;18;19;20;21;22.

第 15 讲　函数的微分

15.1　定义与性质

设 $y=f(x)$ 在 $\overline{U}(x_0,\delta)$ 上有定义,$x_0+\Delta x\in\overline{U}(x_0,\delta)$. 若 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+A(x)\Delta x$, 其中 $A(x)\to 0(x\to x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处可微, 且将 Δy 的线性主部分 $A\Delta x$ 称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的微分, 记作 $dy\big|_{x_0}=A\Delta$ 或 $df(x)\big|_{x_0}=A\Delta x$.

若 $y=f(x)$ 在区间 I 上每一点 x 处都可微, 则称 $f(x)$ 在 I 上可微, 此时 $df(x)=A\Delta x,x\in I$.

定理 15.1. *$y=f(x)$ 在 x_0 处可微 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 处可导*

由 $df(x)=f'(x)\Delta x\Rightarrow dx=(x)'_x\Delta x=\Delta x$, 即自变量的微分等于自变量的增量. 于是 $df(x)=dy=f'(x)dx$.

微分 $df(x)\big|_{x_0}$ 的几何意义是曲线 $y=f(x)$ 上点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线的增量. 由 $df(x)\big|_{x_0}=f'(x_0)\Delta x$ 知, $df(x)\big|_{x_0}=dy\big|_{x_0}$ 是切线在 x_0 的增量.$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)\approx f'(x_0)\Delta x=df(x)\big|_{x_0}$ 表明曲线 $y=f(x)$ 在 x_0 处的增量 Δy, 在局部可用相应切线上的增量 $f'(x_0)\Delta x=f'(x_0)(x-x_0)$ 代替, 也即局部线性化.

注记. *助教注:*

某一点 m 次可微, 该点 $m-1$ 次连续, 在邻域内 $m-2$ 次连续.

从 $df(x)=f'(x)dx$ 及导数的四则运算法则可得以下微分四则运算法则:

设 $u(x),v(x)$ 在 x 处可微,c_1,c_2 为常数, 则

1. $(c_1u(x)\pm c_2v(x))'=c_1u'(x)\pm c_2v'(x)$;
2. $(u(x)v(x))'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$;
3. $(\frac{u(x)}{v(x)})'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)},v(x)\neq 0$.

定理 15.2. *设 $y=f(u)$ 可微, 则无论 u 是自变量, 还是中间变量, 总有 $df(u)=f'(u)du$. 该性质称为微分的形式不变性.*

15.2　18 个基本微分公式

a,α,c 为常数,$a>0,a\neq 1$,u 是自变量或中间变量.

(1). $d(C)=0\cdot du$;

(2). $d(u^\alpha)=\alpha u^{\alpha-1}du$;

(3). $d(a^u)=a^u\ln a\cdot du$;

(4). $d(e^u)=e^u du$;

(5). $d(\ln u)=\dfrac{1}{u}du$;

(6). $d(\log_a u)=\dfrac{1}{u\ln a}du$;

(7). $d(\sin u)=\cos u du$;

(8). $d(\cos u)=-\sin u du$;

(9). $d(\tan u)=\sec^2 u du$;

(10). $d(\cot u)=-\csc^2 u du$;

(11). $d(\sec u)=\sec u\tan u du$;

(12). $d(\csc u)=-\csc u\cot u du$;

(13). $d(\arcsin u)=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}du$;

(14). $d(\arccos u)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}du$;

(15). $d(\arctan u)=\dfrac{1}{1+u^2}du$;

(16). $d(\mathrm{arccot} u)=-\dfrac{1}{1+u^2}du$;

(17). $d(\sinh u)=\cosh u du$;

(18). $d(\cosh u)=\sinh u du$.

15.3 例题

例 15.3. 设 $y=y(x)$, 由方程 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$ 确定, 求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

例 15.4. 设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\cos^3 t,\\ y=\sin^3 t,\end{cases}$ 确定, 求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

例 15.5. 设 $y=e^{-\arctan^3\frac{1}{x^2}}$, 求 $dy,\dfrac{dy}{dx}$.

作业. ex3.2:2(2)(3)(4)(5)(6);3(1)(3);4;CH3:2.

第 16 讲 微分中值定理

16.1 内点与函数的极值

设 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义,$x_0\in I$, 且 $\exists\delta>0$, 使得 $\overline{U}(x_0,\delta)\subset I$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的内点. 若 $\forall x\in\overline{U}(x_0,\delta), f(x)\le f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处有极大值 $f(x_0)$, 极大值与极小值统称为极值.

注记 16.1. 函数 $f(x)$ 的极值只能在内点处渠道, 在 I 的边界点上只可能有 $f(x)$ 的最值, 而无极值.

注记 16.2. 函数极值是一个局部概念, 因此同一个函数的极大值也许比极小值还小.

16.2 费尔玛 (Fermat) 定理, 罗尔 (Rolle) 定理, 拉格朗日 (Lagrange) 中值定理, 柯西 (Cauchy) 中值定理

定理 16.3. *Fermat* 定理

若 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义,$x_0\in I$, 且 $f(x_0)$ 是 f 在 I 上的一个极值, 若 $f'(x_0)$ 存在, 则必有 $f'(x_0)=0$. 称这种使得 $f'(x_0)=0$ 的点为 $f(x)$ 的驻点.

Fermat 定理告诉我们, 可导的极值点一定是驻点, 但驻点不一定是极值点. 如 $f(x)=x^3$ 在 $x=0$ 处有 $f'(0)=0$, 但 $f(x)$ 在 $x=0$ 处无极值.

定理 16.4. *Rolle* 定理

若 $y=f(x)$ 满足 $\begin{cases} f(x)\in C[a,b], \\ f(x)\in D(a,b), \\ f(a)=f(b), \end{cases}$, 则至少有一点 $\xi in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=0$. 即曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内至少有一点处的切线平行于 x 轴.

定理 16.5. *Lagrange* 中值定理

若 $y=f(x)$ 满足 $\begin{cases} f(x)\in C[a,b], \\ f(x)\in D(a,b), \end{cases}$, 则至少有一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$.

即曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内至少有一点处的切线与过 $A(a,f(a)),B(b,f(b))$ 的直线平行.

定理 16.6. *Cauchy* 中值定理

若 $y=f(x),y=g(x)$ 满足 $\begin{cases} f(x),g(x)\in C[a,b], \\ f(x),g(x)\in D(a,b), \\ g'(x)\neq 0, x\in(a,b), \end{cases}$, 则至少有一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

注记 16.7. 当 $g(x)=x$ 时,*Cauchy* 中值定理即为 *Lagrange* 中值定理.

当 $f(a)=f(b)$ 时,*Lagrange* 中值定理即为 *Rolle* 定理.

16.3 高阶微分未必有形式不变性

例 16.8. 设 $y = e^u, u = \sin x$, 则 $dy = e^u du = e^{\sin x}\cos x dx$.

$d^2y = d(dy) = d(e^{\sin x}\cos x dx)' = (e^{\sin x}\cos x dx)' dx = (e^{\sin x}\cos x dx)'(dx)^2 = e^{\sin x}\cos x dx \cos x dx = e^{\sin x}\cos^2 x dx^2 \neq e^u(du)^2 = y''(u)(du)^2$.

但当 u 是自变量时, 必有 $dy = y'(u)du, d^2y = y''(u)(du)^2$.

注记. 助教注:

$d^2y = d(dy) = d(y'(x)dx) = A(x)dx'dx$, 其中 dx 为自变量的极小增量, 而 dx' 为中间变量的极小增量, 将 $dx'dx$ 简记为 $(dx)^2$, 或者 dx^2.

作业. ex3.3:1,2,4(1),5(1),15,19(2),20(1)(4).

第 17 讲 微分中值定理及应用习题课

17.1 达布定理（Darboux）

定理 17.1. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导, 则

(1) $f'(x)$ 在 (a,b) 中无第一类间断点;

(2) 即使 $f'(x)$ 在 (a,b) 中不连续,$f'(x)$ 在 (a,b) 中仍满足介值性与零值性.

(3) 若 $f'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$, 则要么 $f'(x) > 0, \forall x \in (a,b)$, 要么 $f'(x) < 0, \forall x \in (a,b)$.

17.2 习题

例 17.2. 证明:

(1) $f(x)$ 在区间 I 上为常函数 $\Leftrightarrow f'(x) = 0, \forall x \in I$;

(2) 若 $f'(x) > 0, \forall x \in I$, 则 $f(x)$ 在 I 上严格单调增加.

例 17.3. 证明:

(1) 若 f 在 x_0 处连续, 且 $f'(x)$ 在 x_0 两侧存在, 异号,$f'(x_0)$ 可以不存在, 则 $f(x_0)$ 为 f 的极值点;

(2) 若 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0(< 0)$, 则 $f(x_0)$ 必为 f 的极小值 (极大值) 点.

(3) 若 $f'(x_0) = f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0$, 则 $f(x_0)$ 不是 f 的极值点.

例 17.4. 证明以下不等式:

1. (1) $\dfrac{\beta-\alpha}{\cos^2\alpha} < \tan\beta - \tan\alpha < \dfrac{\beta-\alpha}{\cos^2\beta}$, $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$;
2. (2) $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, x > 0$.
3. (3) $\tan x > x - \dfrac{x^3}{3}, 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.
4. (4) $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x$,

   $x - \dfrac{x^3}{3!} < \sin x < x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$,

   $x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} < \sin x < x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \dfrac{x^9}{9!}, 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

例 17.5. 求 $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ 在 $[-2, 2]$ 上的最大值与最小值.

tips: 函数在 R 上连续可微, 则最值点要么是极值点要么边界点, 极值点处的导数为 0.

例 17.6. 机动题

证明二次曲线 $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$ 上 $M_0(x_0, y_0)$ 处的切线方程为 $axx_0 + byy_0 + \dfrac{c}{2}(x + x_0) + \dfrac{d}{2}(y + y_0) + e = 0$, 其中 a, b, c, d, e 为常数, 且 a, b 不全为 0.

作业. ex3.3:4(4),17,19(1),21(2),25,26.

第 18 讲 洛必达 (L'Hospital) 法则及其应用

18.1 "0/0" 型洛必达法则

设 $f(x), g(x)$ 在 (a, b) 中可微, 且 $g'(x) \neq 0$, 而 $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, 其中 $A \in R$ 或 $A = \infty$, 则 $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

18.2 "$*/\infty$" 型洛必达法则

设 $f(x), g(x)$ 在 (a, b) 中可微, 且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$, 而 $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, 其中 $A \in R$ 或 $A = \infty$, 则 $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

注记 18.1. 当 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 仍然满足洛必达法则时，可以继续使用洛必达法则. $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}=\cdots=\cdots$.

如 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{2e^{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x}{4e^{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{8e^{2x}}=0$.

注记 18.2. 当 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在且是振荡不存在时, $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 也可能存在, 此时洛必达法则不适用, 如 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x+\cos x}{x}=1$, 而 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\cos x}{x}$ 不存在.

也可以举例 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2\sin 1/x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}x\sin 1/x=0$, 而 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x\sin 1/x-\cos 1/x}{1}$ 不存在.

因此, 无论是 $0/0$ 型, 还是 $*/\infty$ 中, 若 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 为振荡发散时, 则宜用别的方法计算 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, 洛必达法则此时不适用.

18.3 洛必达法则的应用举例

例 18.3. 计算下列极限:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x)$;
2. $\lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{1}{\ln x}+\dfrac{1}{1-x}\right)$;
3. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;
4. $\lim\limits_{x\to0^+}x^x$;
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\dfrac{1}{\sqrt{x}}}$;
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^\alpha}{a^x}, a>1, \alpha>0$.
7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^m}{x^\alpha}, m>0, \alpha>0$.
8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^\alpha}, \alpha>0$.

作业. ex3.4:3,4,5(1)(12)(13)(14)(15);CH3:13.

第 19 讲 极限连续性, 可微性习题课

19.1 高阶微分未必有形式不变性

(1) 设 $y=f(x)$ 在 I 上二阶可导, 则 $dy=df(x)=f'(x)dx, d^2y=d(dy)=d(f'(x)dx)=(f'(x)dx)'dx=f''(x)dx'dx=f''(x)(dx)^2$.

此处 dx' 记号不是导数, 而是二阶增量.$dx'dx$ 简记为 $(dx)^2$, 或者 dx^2.

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=f''(x)$, 当 $f(x)$ n 阶可导时, 有 $\dfrac{d^ny}{dx^n}=f^{(n)}(x), n=1,2,3,\cdots$.

(2) 设 $y=f(x), x\in I, x=\varphi(t)$, 皆二阶可导, 则

$dy=df(x)=df(\varphi(t))=(f(\varphi(t)))'dt=f'(\varphi(t))\varphi'(t)dt=f'(x)dx$. 这是一阶形式不变性.

$d^y=d(dy)=d(f'(\varphi(t))\varphi'(t)dt)=(f'(\varphi(t))\varphi'(t)dt)'dt=f''(x)dx^2+f'(\varphi(t))\varphi''(t)dt^2\neq f''(x)(dx)^2$. 故高阶微分未必有形式不变性.

19.2 Henie 定理及其证明

设 $x_0\in R, \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a\in R \Leftrightarrow \forall\{a_n\}: a_n\to x_0, a_n\neq x_0$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=a$.

注记. *助教注: 也就是极限存在的时候, 可以交换极限与函数运算的次序.*

19.3 函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 收敛的 Cauchy 准则

设 $x_0\in R, \lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, s.t.\forall x_1,x_2\in U(x_0,\delta), |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

注意 $f'(x_0+0)$ 与 $f'_+(x_0)$ 的区别, 前者是右导数, 后者是右极限, 二者不一定相等.

例 19.1. $y=f(x)=sgnx=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$, 则 $f'(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ \text{不存在}, & x=0.\end{cases}$.

则 $f'(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=0, f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-0}{x-0}=\infty$.

例 19.2. $y=f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}, f'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$.

则 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=0$. 而 $f'(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^+}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$ 振荡发散.

19.4 展开

若 $f^{(2)}(x_0)$ 存在, 则 $\exists\delta>0, s.t.\forall x\in\bar{U}(x_0,\delta), f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$.

若 $f^{(3)}(x_0)$ 存在, 则 $\exists\delta>0, s.t.\forall x\in\bar{U}(x_0,\delta), f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dfrac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3)$.

若 $f^{(n)}(x_0)$ 存在, 则 $\exists\delta>0, s.t.\forall x\in\bar{U}(x_0,\delta), f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$.

19.5 极值点判断

(1) 设 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 若 $f'(x_0)$ 在 x_0 两侧存在, 异号, 则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极值点.$f'(x_0)$ 可以不存在. 这即极值存在的一阶导判别法.

(2) 若 $f'(x_0)=0, f''(x_0)>0(<0)$, 则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值 (极大值) 点. 此即极值存在的二阶导判别法.

(3) 若 $f'(x_0)=f''(x_0)=f^{(2n-1)}(x_0)=0, f^{(2n)}>0(<0)$, 则 $f(x_0)$ 必是 $f(x)$ 的极小值 (极大值) 点. 此即极值存在的高阶导判别法.

注记 19.3. 若 $f'(x_0)=f''(x_0)=0, f^{(3)}(x_0)\neq0$, 则 $M_0(x_0,f(x_0))$ 为连续曲线上凹凸部分的分界点, 称为连续曲线的拐点. 在高数中称点 M_0 为连续曲线的拐点, 在数分钟称其横坐标 x_0 为函数 $f(x)$ 的拐点.

第 20 讲 曲线的凹凸与拐点

20.1 凸函数与拐点的定义

设 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上有定义, 若 $\forall x_1,x_2\in(a,b)$ 都有

$$f(\frac{x_1+x_2}{2})\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

, 则称 $f(x)$ 在 (a,b) 上为凸函数. 称 I 为 $f(x)$ 的凸区间. 当上式中仅成立严格不等号时, 则称 $f(x)$ 在 (a,b) 上为严格凸函数. 连续曲线上凹凸部分的分界点称

为拐点.

凹函数 (concave)$f(x)$ 定义为 $-f(x)$ 为凸函数 (convex).

例 20.1. $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为凸函数; $y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上为凹函数.

例 20.2. $y=\sin x$ 在 $(0,\pi)$ 上为凹函数, 在 $(\pi,2\pi)$ 上为凸函数. 且 $\sin x$ 处处连续, 因此 π 为 $\sin x$ 的拐点. 事实上 $f(x)=\sin x, g(x)=\cos x$ 在 $I=(-\infty,+\infty)$ 上都有无数个拐点.

20.2 凸函数及拐点判别法

定理 20.3. 凸性的零阶导判别法

设 $f(x)$ 在 I 上有定义, 若 $\forall x_1,x_2\in I, \forall\lambda_1,\lambda_2\in(0,1), \lambda_1+\lambda_2=1$ 都有 $f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\le\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)$, 则 $f(x)$ 在 I 上为凸函数.

定理 20.4. 零阶导判别法

$f(x)$ 在区间 I 上为凸函数 $\Leftrightarrow \forall x_1,x_2\in I, x_1<x_2$ 都有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

.

定理 20.5. 一阶导判别法

若 $f'(x)$ 在 I 上存在, 则 $f(x)$ 在 I 上为凸函数 $\Leftrightarrow f'(x)$ 在 I 上单调增.

定理 20.6. 二阶导判别法

若 $f''(x)$ 在 I 上存在, 则 $f(x)$ 在 I 上为凸函数 $\Leftrightarrow f''(x)\ge0, x\in I$.

定理 20.7. 若 x_0 是 $f(x)$ 的拐点, 且 $f''(x_0)$ 存在, 则 $f''(x_0)=0$, 但反之不必然.

定理 20.8. 若 $f(x)$ 在 x_0 处连续,$f''(x)$ 在 x_0 两侧存在, 异号,($f''(x_0)$ 可以不存在), 则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的拐点.

20.3 例题

例 20.9. 设 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, 求 $f(x)$ 的凸区间, 拐点; 求 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的极值与最值.

例 20.10. 设 $f(x)=\dfrac{c}{a+e^{-bx}}, x\in(-\infty,+\infty)$, 其中 $a,b,c>0$.

(1) 证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 中无极值点;

(2) 证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 中有一个拐点.

此曲线称为逻辑斯蒂曲线 *(logistic curve)*, 或者称之为 S 型曲线.

作业. ex3.5:5,6,7,8(1)(4)(6),9;CH3:14(1)(4).

例 20.11. 思考题

求函数 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ 的凹凸区间, 拐点, 极值, 最值与图像.

第 21 讲 泰勒 (Taylor) 公式及其应用

21.1 具有 Peano 余项的 Taylor 公式

例 21.1. 设 $f''(x_0)$ 存在, 证明:$\exists\delta>0,\forall x\in U(x_0,\delta)$, 恒有 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$.

例 21.2. 设 $f'''(x_0)$ 存在, 证明:$\exists\delta>0,\forall x\in U(x_0,\delta)$, 恒有 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dfrac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3)$.

定理 21.3. 若 $f^{(n)}(x_0)$ 存在, 则 $\exists\delta>0,\forall x\in U(x_0,\delta)$, 恒有 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$.

记 $P_n(x)=\displaystyle\sum_{m=0}^{n}\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m$ 为 $f(x)$ 在 x_0 处的 n 阶 *Taylor* 多项式. 则 $f(x)=P_n(x)+o((x-x_0)^n)$, 其中 $o((x-x_0)^n)$ 称为皮亚诺 *(Peano)* 余项.

21.2 具有 Lagrange 余项的 Taylor 公式

定理 21.4. 设 $f(x)$ 在区间 I 中有 $n+1$ 阶导数, 则 $\forall x,x_0\in I$, 存在 $\xi\in U(x_0,x)$, 使得 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

称 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 为 $f(x)$ 的 n 阶 *Lagrange* 余项.

显然,Peano 余项 $o((x-x_0)^n)$ 是定性的, 而 Lagrange 余项 $R_n(x)$ 是定量的, 且后者显然是包含前者的, 即 $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$.

注记 21.5. *Peano 余项的 Taylor 公式称之为局部 Taylor 公式, 因为此公式仅在 $U(x_0,\delta)$ 上成立.*

而 Lagrange 余项的 Taylor 公式称之为整体 Taylor 公式, 因为此公式在整个区间 I 上任意一点 x 上成立. 但代价则是对条件要求高一阶导.

注记 21.6. *无论是 Peano 余项还是 Lagrange 余项, 都是用来估计 $f(x)$ 与 $P_n(x)$ 的误差的, 这表明: 函数 $f(x)$ 在指定点 x_0 处的 n 阶 Taylot 公式由 $f(x)$ 及 x_0 唯一确定.*

特别地, 当 $x_0=0$ 时, 分别有:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n);$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

前者称为具有 Peano 余项的麦克劳林 Maclaurin 公式, 后者称为具有 Lagrange 余项的麦克劳林公式.

21.3 五个经典 Taylor 公式

(1) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}, x\in(-\infty,+\infty), 0<\xi<x \ or \ x<\xi<0.$

(2) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1}), x\in(-\infty,+\infty).$

(3) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n}), x\in(-\infty,+\infty).$

(4) $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n), x\in(-1,+\infty).$

特别地, 当 $\alpha\in N^*$ 时, 为二项式定理.

(5) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n), x\in(-1,+\infty).$

21.4 应用举例

例 21.7. *证明 e 为无理数.*

例 21.8. *若 $f^{(k)}(x_0)=0, k=1,2,\cdots,m-1, f^{(m)}(x_0)>0(<0)$, 则当 $m=2n, n\in N^*$ 时,x_0 为 $f(x)$ 的拐点, 但不是 $f(x)$ 的极值点.*

例 21.9. 求 $f(x) = \dfrac{x^3+2x+1}{x-1}$ 的 n 阶 *Maclaurin* 展开式.

$$f(x) = x^2+x+3-\frac{4}{x-1} = -1-3x-3x^2-4x^3-\cdots-4x^{n-1}+o(x^n).$$

例 21.10. 求 $f(x) = \cos^2 x$ 的 $2n$ 阶 *MacLaurin* 展开式.

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x = 1-\frac{2^1}{2!}x^2+\frac{2^3}{4!}x^4-\cdots+(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n}).$$

作业. ex3.6:1(2),3,5,7;CH3:10,15.

第 22 讲　微分学的应用举例

22.1　曲线弯曲程度 (曲率)

设 $y=f(x)$ 在区间 I 上二阶可导, 设曲线 $L: y=f(x), x\in I$ 当 L 的切线从 A 点移动到 B 点时,$\Delta\theta_1$ 称为相应的切线转角,$\Delta\theta_2$ 为切线从 B 点转到 C 点时的切线转角.

显然, 在弧长相等的前提下, 转角愈大时, 对应的弧也愈弯曲, 因此我们想要找到一个量来描述曲线的弯曲程度, 这个量就是曲率.

设从 A 点转到 B 点的弧长为 Δs, 转角为 $\Delta\theta$, 则平均曲率定义为 $\bar{k} = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta s}$.

设点 $A(x,f(x)), B(x+\Delta x, y+\Delta y)$. 当 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\bar{k} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta\theta}{\Delta s}$ 收敛时, 称此极限为曲线 $y=f(x)$ 在 A 点处的曲率, 记作 $k = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta\theta}{\Delta s} = \dfrac{d\theta}{ds}$.

由 $\tan\theta = y' = f'(x) \Rightarrow \theta = \arctan f'(x)$, 则 $d\theta = \dfrac{f''(x)}{1+f'^2(x)}dx$.

$ds = \sqrt{1+f'^2(x)}dx$.

弧长 ds 的计算体现了局部以直代曲的微积分思想. 事实上, 圆的周长计算用圆的内接正多边形周长的极限或用圆的外切正多边形周长的极限表示, 也是这种局部线性化思想. 光滑曲线的弧长计算仍用了这种思想.

综上可以得出 $k = \dfrac{y''(x)}{(1+y'^2(x))^{3/2}} = \dfrac{f''(x)}{(1+f'^2(x))^{3/2}}$.

当 $k\geq 0$ 时, 曲线为向上弯曲的, 当 $k\leq 0$ 时, 曲线为向下弯曲的. 且 k 愈大, 曲线愈弯曲.

当曲线 L 使用参数方程 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ 确定的时候,$y'(x) = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}, y''(x) = \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}(\dfrac{dy}{dx}) = \dfrac{d}{dt}(\dfrac{dy}{dx})/\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{(x'(t))^2}$. 由此得出

$$k = \frac{y''(x)}{(1+y'^2(x))^{3/2}} = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}}.$$

例 22.1. 计算直线 $y = f(x) = ax + b$,a, b 为常数, 上各点的曲率.

例 22.2. 计算圆 $x^2 + y^2 = a^2, a > 0$ 上各点的曲率.

由此能发现, 当半径 $a \to \infty$ 时, 圆的曲率趋于 0, 即圆的曲率趋于直线的曲率. 事实上, 在复变函数中, 将直线也看作是圆, 是半径为无穷大的圆.

注记. 助教注: 在复变函数中, 复平面尽管看起来是 R^2 平面, 但是实际上无论哪个方向的无穷远都是同一个点, 这个点称作为无穷远点, 这个性质在实函数中是不存在的.

22.2 曲率圆, 曲率半径, 曲率中心

设曲线 $y = f(x)$ 是 I 上的光滑曲线, 即 $f'(x)$ 在 I 上连续. 设 L 为曲线 $y = f(x), M_0(x_0, y_0) \in L$, 且 $k(x_0) > 0$. 过点 M_0 作曲线 L 的法线 N, 在 L 的凸向一侧的 N 上取点 $Q(\alpha, \beta)$, 使得 $|QM_0| = \dfrac{1}{k(x_0)} := \rho > 0$.

则称以 M_0 为圆心,ρ 为半径的圆为曲线 L 在点 M_0 处的曲率圆, 称 ρ 为曲率半径, 称 M_0 为曲率中心.

此圆周 $\mathcal{G}$ 与曲线 L 在 M_0 处有四同, 同函数值, 同切线, 同曲率, 同凸向. 因此, 可以将 $\mathcal{G}$ 看作是曲线 L 在 M_0 处的局部近似, 可以用 $\mathcal{G}$ 来近似代替 L, 这种以曲代曲有着较好的效果.

当点 M_0 沿曲线 L 变动时, 响应的曲率中心 $Q(\alpha, \beta)$ 的运动轨迹称为 L 的渐展线. 相对于渐展线, 原来的曲线 L 称为渐伸线.

例 22.3. 求曲线 $L: y = f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 的极值, 最值, 拐点, 渐进线.

22.3 Taylor 公式的应用

由每一个 Taylor 展开, 都可以列出无数个等价无穷小, 无数个不等式.

例 22.4. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)$.

$e^x = 1 + x + o(x) \Rightarrow e^x - 1 \sim x;$

$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow e^x - 1 - x \sim \dfrac{x^2}{2};$

$e^x - (1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \cdots + \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}) \sim \dfrac{x^n}{n!}, x \to 0, n = 1, 2, 3 \cdots.$

例 22.5. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) < x$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) > x - \frac{x^3}{3!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7) < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

作业. ex3.6:1(2),2,4,6,11;CH3:14(2)(3),16;ex3.5:12,13.