第2讲：泰勒(Taylor)公式及其应用

(一) 具有皮亚诺(Peano)型余项的Taylor公式：

例1. 设 $f''(x_0)$ 存在，证明：$\exists\delta>0$，使 $\forall x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$，恒有：

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2). \quad (\text{式}1)$$

例2. 设 $f^{(3)}(x_0)$ 存在，证明：$\exists\delta>0$，使 $\forall x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$，恒有：

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3), \quad (\text{式}2).$$

证例1：$\because \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2]}{(x-x_0)^2}$ 为“$\frac{0}{0}$”

$$\underline{\text{L法则}}\ \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)-f''(x_0)(x-x_0)}{2(x-x_0)}$$

不能再使用L法则，$\because f''(x)$ 在 x_0 处不C

$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}-f''(x_0)\right)\right)=\frac{1}{2}(f''(x_0)-f''(x_0))=0\Rightarrow\exists\delta>0,$$

使：$f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2]=o((x-x_0)^2)$，$\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$

即：$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$.

证例2：$\because \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3]}{(x-x_0)^3}$ 为“$\frac{0}{0}$”

L法则两次 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)-f''(x_0)-f^{(3)}(x_0)(x-x_0)}{6(x-x_0)}$ 不能再用L法则.

∵$f^{(3)}(x)$在x_0两侧~~不存在~~无定义!

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}-f^{(3)}(x_0)\right)=\frac{1}{6}\left(f^{(3)}(x_0)-f^{(3)}(x_0)\right)=0\Rightarrow$$

$\exists\delta>0$，对$\forall x\in U(x_0,\delta)$

使 $f(x)-\left[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dfrac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3\right]=o((x-x_0)^3)$

即 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dfrac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3)$

Th1. 若$f^{(n)}(x_0)$存在，$n\in N^*$，则$\exists\delta>0$，对$\forall x\in U(x_0,\delta)$，恒有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)\quad(\text{公式})$$

即 $f(x)=\sum\limits_{m=0}^{n}\dfrac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m+o((x-x_0)^n)=P_n(x)+o((x-x_0)^n)$ (公式)

称n次多项式：$P_n(x)\triangleq\sum\limits_{m=0}^{n}\dfrac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m$ 为$f(x)$在x_0处~~的~~Taylor多项式.

注：P133, Th3.32 修改!

而$o((x-x_0)^n)$为佩亚诺(peano)型余项。故改为$f^{(n)}(x_0)$存在即可。

(三) 具有Lagrange型余项的n阶Taylor公式：

设$f(x)$在区间I中有n+1阶导数，$n\in N$. $x_0\in I$，则对$\forall x\in I$，

恒有：$f(x)=\sum\limits_{m=0}^{n}\dfrac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m+\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$\xi\in(x_0,x)$或$(x,x_0)$. (公式)

(性3),(性4)的证法同例1、例2：因为 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n}$ 为"$\frac{0}{0}$"

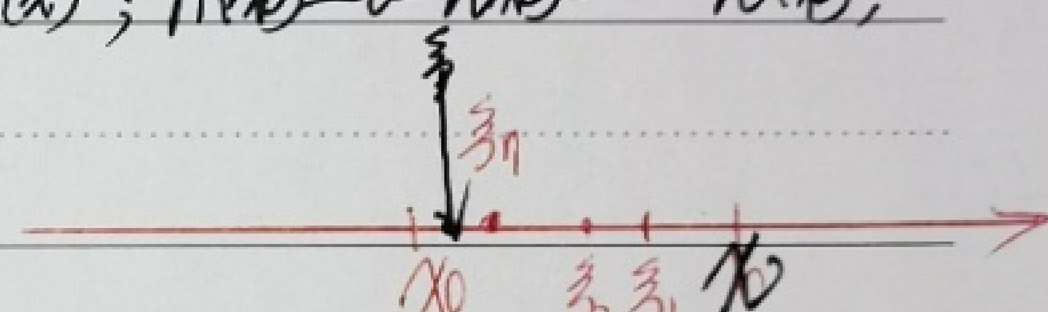
且连用L'Hospital法则 $n-1$ 次后，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n}==$ 不能再用L法则！∵ $f^{(n)}(x)$ 在 x_0 邻域无定义！

$$=\frac{1}{n!}\left(\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}-f^{(n)}(x_0)\right)=\frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(x_0)-f^{(n)}(x_0)\right)=0\Rightarrow\exists\delta>0$$

$\therefore f(x)-P_n(x)=o((x-x_0)^n)\Leftrightarrow f(x)=P_n(x)+o((x-x_0)^n)$. $\forall x\in U(x_0,\delta)$

证(性5)：令 $g(x)=f(x)-P_n(x)$，$h(x)=(x-x_0)^{n+1}$，且 $g(x_0)=0=g'(x_0)=$ $g''(x_0)=\cdots=g^{(n)}(x_0)$，且 $g^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)$；$h(x_0)=0=h'(x_0)=\cdots=h^{(n)}(x_0)$，

$(h(x))^{(n+1)}=(n+1)!$



在 $[x_0,x]\subset I$ 中对 $g(x),h(x)$ 应用Cauchy中值th：$\exists\xi_1\in(x_0,x)$，使

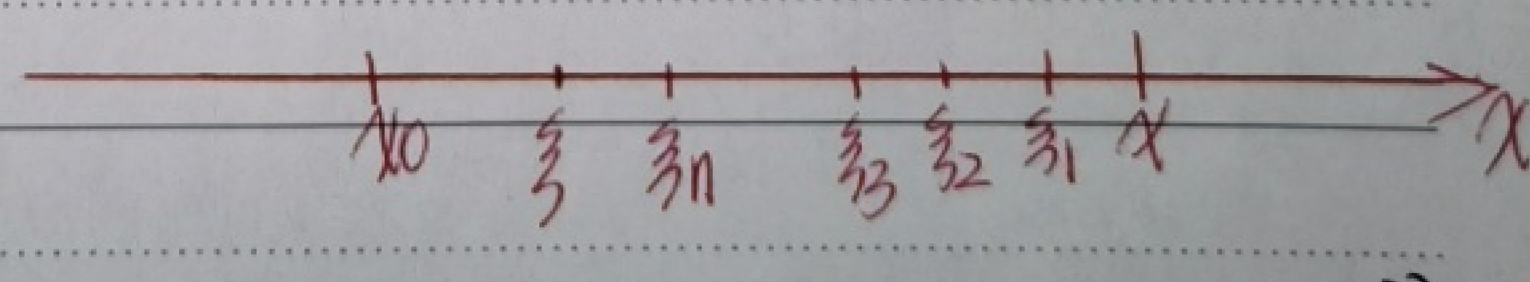
$$\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{g(x)-g(x_0)}{h(x)-h(x_0)}=\frac{g'(\xi_1)}{h'(\xi_1)}=\frac{g'(\xi_1)-g'(x_0)}{h'(\xi_1)-h'(x_0)}\xlongequal{\xi_2\in(x_0,\xi_1)}\frac{g''(\xi_2)}{h''(\xi_2)}=\frac{g''(\xi_2)-g''(x_0)}{h''(\xi_2)-h''(x_0)}$$

$$=\frac{g^{(3)}(\xi_3)}{h^{(3)}(\xi_3)}=\cdots=\frac{g^{(n)}(\xi_n)}{h^{(n)}(\xi_n)}=\frac{g^{(n)}(\xi_n)-g^{(n)}(x_0)}{h^{(n)}(\xi_n)-h^{(n)}(x_0)}\xlongequal{\xi\in(x_0,\xi_n)}\frac{g^{(n+1)}(\xi)}{h^{(n+1)}(\xi)}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

$$\Rightarrow g(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h(x)\Leftrightarrow f(x)-P_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\Leftrightarrow$$

$$f(x)=P_n(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=\sum_{m=0}^{n}\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$\xi\in(x_0,\xi_n)\subset(x_0,x)$



称 $R_n(x) \triangleq \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$ 为 Lagrange 型的余项.

显然, Peano 型余项 $o((x-x_0)^n)$ 是定性的, 而 Lagrange 型余项 $\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$ 是定量的, 同时也是定性的:

$$\because \frac{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}{(x-x_0)^n} \xrightarrow{x\to x_0} 0 \quad \therefore \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = o((x-x_0)^n).$$

注(1): Peano 型余项的 Taylor 公式 (式3) 或 (式4), 称之为局部 Taylor 公式. 这是因为 (式3) 或 (式4) 仅在 x_0 的局部 $U(x_0,\delta)$ 上成立。

而 Lagrange 型的 Taylor 公式 (式5), 称之为整体 Taylor 公式, 是因为 (式5) 可以在整个区间 I 上任一点 x 处成立。但 (式5) 的要求也比 (式3) 的要求高很多!

注(2): 无论是 (式3) 还是 (式5) 都表明: 函数 f(x) 在指定点 x_0 处的 n 阶 Taylor 公式, 由 f(x) 及 x_0 唯一确定。

特别地, 当 (式3), (式5) 中的 $x_0=0$ 时, 分别有:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) \qquad (式6)$$

(4).

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (\text{木})$$

其中，$\xi\in(0,x)$ 或 $\xi\in(x,0)$.

称(☆)为是带peano型余项的麦克劳林(Maclaurin)公式；

(木)为是带Lagrange型余项的麦克劳林公式。

(三) 五个著名的Taylor公式（须熟练掌握！）

(1). $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\xi}x^{n+1}}{(n+1)!}$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

$0<\xi<x$ 或 $x<\xi<0$. 利用：$0<\frac{\xi}{x}<1$ 令 $\frac{\xi}{x}=\theta$，则 $0<\theta<1$，且 $\xi=\theta x$.

(2). $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1})$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

(3). $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

(4). $(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$

其中 $x\in(-1,+\infty)$. $\forall\alpha\in R$. 当 $\alpha\in N^*$ 时，为二项式定理。

(5). $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$，$x\in(-1,+\infty)$

证(1)：$\because f^{(n)}(0)=(e^x)^{(n)}\big|_{x=0}=e^x\big|_{x=0}=1$，$\therefore a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{1}{n!}$

$n=0,1,2,3,\cdots$ 代入(木)

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$，

其中，$0<\xi<x$ 或 $\xi=\theta x$，$\theta\in(0,1)$. 特别地，当 $x=1$ 时，有

$e = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}$，$\theta\in(0,1)$ （式8）

利用（式8），可以证明 e 是一个无理数！

证(2)：$\because (\sin x)^{(n)} = \sin(x+\frac{n}{2}\pi)$，$\therefore f^{(n)}(0) = (\sin x)^{(n)}\big|_{x=0} = \sin\frac{n}{2}\pi$

$=0$，$n=0,2,4,6,\cdots$，当 $n=2k+1$ 时，$f^{(2k+1)}(0) = \sin\frac{2k+1}{2}\pi$

$=\sin(k\pi+\frac{\pi}{2}) = (-1)^k \Rightarrow f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$，$a_n = \begin{cases} 0 & n=2k \\ \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} & n=2k+1 \end{cases}$ $k=0,1,2,3,\cdots$

代入（式7）得：

$f(x)=\sin x = x + \frac{(-1)^1}{3!}x^3 + \frac{(-1)^2}{5!}x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + R_{2n+1}(x)$.

其中，$R_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+3)}(\theta x)}{(2n+3)!}x^{2n+3} = \frac{\sin(\theta x+\frac{2n+3}{2}\pi)x^{2n+3}}{(2n+3)!} = \frac{(-1)^{n+1}(\cos\theta x)x^{2n+3}}{(2n+3)!}$

$=o(x^{2n+1})$

证(5)：$\because \frac{f^{(n)}(x)}{n!}\Big|_{x=0} = \frac{(\ln(1+x))^{(n)}}{n!}\Big|_{x=0} \triangleq a_n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!(x+1)^n}\Big|_{x=0} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$，$n=1,2,3,\cdots$

$\therefore f(x) = \ln(1+x) = \frac{1}{1}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + R_n(x)$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{(-1)^n n!}{(\theta x+1)^{n+1}}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(\theta x+1)^{n+1}}=o(x^n).$$

(四) 应用举例：

例1. 证明 e 为无理数.

例2. 若 $f^{(k)}(x_0)=0$, $k=1,2,3,\cdots,m-1$, 且 $f^{(m)}(x_0)>0\,(<0)$,

则当 $m=2n$, $n\in N^*$ 时, $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小(大)值；当 $m=2n+1$,

$n\in N^*$ 时, x_0 是 $f(x)$ 的拐点, 但不是 $f(x)$ 的极值点。

例3. 求 $f(x)=\frac{x^3+2x+1}{x-1}$ 的 n 阶 Maclaurin 展开式.

例4. 求 $f(x)=\cos^2 x$ 的 $2n$ 阶 Maclaurin 展开式.

证例1. 从(*)式知, $\exists\theta\in(0,1)$ 使

$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^\theta}{(n+1)!}$, 若 e 是有理数, 则有

$p,q\in N^*$, p,q 互质, 使 $\frac{q}{p}=e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^\theta}{(n+1)!}$ (**)

取 $n>p$, 且 $n>3$, (**)式两边同乘以 $n!$, 则 $n!\frac{q}{p}\triangleq a\in N^*$,

$n!(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!})\triangleq b\in N^*$. $\Rightarrow a=b+\frac{n!}{(n+1)!}e^\theta=b+\frac{e^\theta}{n+1}$

且 $a-b\in Z$, $0<e^\theta<e^1<3\Rightarrow 0<\frac{e^\theta}{n+1}<\frac{3}{n+1}<1$

即一方面, $a-b=\frac{e^{\theta}}{n+1}$ 且 $a-b\in Z$, 但 $0<\frac{e^{\theta}}{n+1}<1\Rightarrow a-b\notin Z$.

矛盾! 故e是无理数。

练例2(1°): 已知 $f^{(1)}(x_0)=f^{(2)}(x_0)=\cdots=f^{(2n-1)}(x_0)=0$, $f^{(2n)}(x_0)>0\ (<0)$

则从 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(2n-1)}(x_0)(x-x_0)^{2n-1}}{(2n-1)!}+\frac{f^{(2n)}(x_0)(x-x_0)^{2n}}{(2n)!}+o((x-x_0)^{2n})$

$\Rightarrow f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(2n)}(x_0)(x-x_0)^{2n}}{(2n)!}+o((x-x_0)^{2n})\geq 0\ (\leq 0)$, $\forall x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$

$\therefore f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值(极大值).

练例2(2°): 将 $f''(x)$ 当函数作Taylor展开:

$f''(x)=f''(x_0)+\frac{f'''(x_0)(x-x_0)^1}{1!}+\frac{f^{(4)}(x_0)(x-x_0)^2}{2!}+\cdots+\frac{f^{(2n)}(x_0)(x-x_0)^{2n-2}}{(2n)!}+\frac{f^{(2n+1)}(x_0)(x-x_0)^{2n-1}}{(2n-1)!}+$

$o((x-x_0)^{2n-1})=0+0+\cdots+0+\frac{f^{(2n+1)}(x_0)(x-x_0)^{2n-1}}{(2n-1)!}+o((x-x_0)^{2n-1})$

当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时, $(x-x_0)^{2n-1}<0\Rightarrow f''(x)<0\Rightarrow f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 为凸函数,

当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时, $(x-x_0)^{2n-1}>0\Rightarrow f''(x)>0\Rightarrow f(x)$ 在 $(x_0,x_0+\delta)$ 为凹函数,

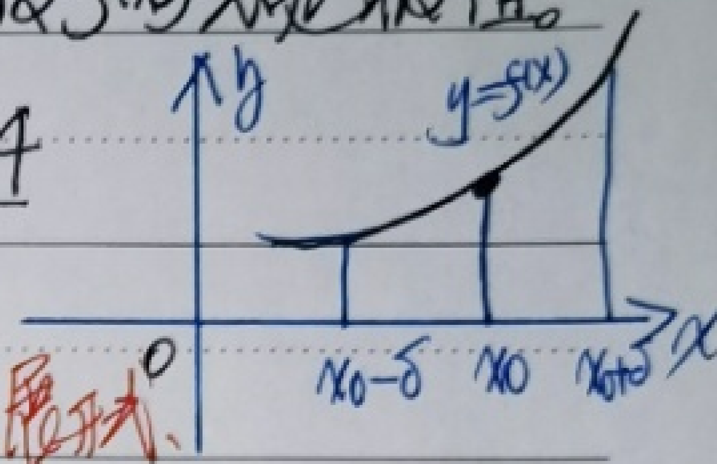
且 $f(x)$ 在 x_0 处可导从而连续, 故 x_0 是 $f(x)$ 的拐点。

练例2(3°): 将 $f(x)$ 当函数作Taylor展开:

$f(x)=f(x_0)+f^{(1)}(x_0)(x-x_0)^1+\frac{f^{(2)}(x_0)(x-x_0)^2}{2!}+\cdots+\frac{f^{(2n)}(x_0)(x-x_0)^{2n-1}}{(2n-1)!}+\frac{f^{(2n+1)}(x_0)(x-x_0)^{2n}}{(2n)!}+R_n(x)$

$=0+0+\cdots+0+\frac{f^{(2n+1)}(x_0)}{(2n)!}(x-x_0)^{2n}+o((x-x_0)^{2n})>0,\ \forall x\in U(x_0,\delta)$

即$f(x)$在$(x_0-\delta, x_0+\delta)$中单调增(减)，故$f(x_0)$不是极值。



解例3：∵ $\frac{x^3+2x+1}{x-1}=\frac{x^3-x^2+x^2-x+3x-3+4}{x-1}$

$=x^2+x+3+\frac{4}{x-1}$　　$(1+(-x))^{\alpha}$，$\alpha=-1$的展开式。

而 $\frac{4}{x-1}=\frac{-4}{1-x}=-4(1+(-x))^{-1}=-4(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+o(x^n))$

∴ $\frac{x^3+2x+1}{x-1}=x^2+x+3-4(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+o(x^n))$

$=-1-3x-3x^2-4(x^3+x^4+\cdots+x^n)+o(x^n)$ 为所求。

解例4：∵ $f(x)=\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$，∴

$\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{(2x)^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})\right)$

$=1-\frac{2^1}{2!}x^2+\frac{2^3x^4}{4!}-\frac{2^5x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n})$

(三) 作业：ex3.6：1(2)；3；5；7；ch3综/10；15.

第21讲补充材料：

(1). 设 $f^{(3)}(x)$ 在 $[-1,1]$ 上存在且连续，$f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$.

证明：$\exists\xi\in(-1,1)$，使 $f'''(\xi)=3$. (ch3综/18)

证：$\because f^{(3)}(x)$ 在 $[-1,1]$ 上存在，依Taylor中值th，对 $\forall x, x_0\in[-1,1]$.

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-x_0)^3 \qquad (※)$$

1° 取 $x=1$，$x_0=0$，有：$f(1)=f(0)+f'(0)(1-0)+\frac{f''(0)}{2!}(1-0)^2+\frac{f'''(\xi_1)}{3!}(1-0)^3$，(※1)

2° 取 $x=-1$，$x_0=0$，有 $f(-1)=f(0)+f'(0)(-1-0)+\frac{f''(0)}{2!}(-1-0)^2+\frac{f'''(\xi_2)}{3!}(-1-0)^3$，(※2)

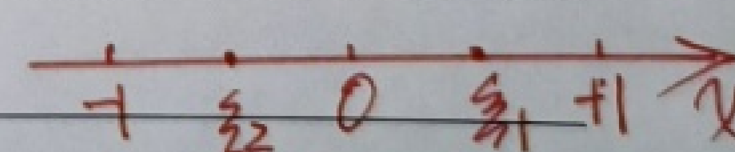
(※1)−(※2)：$1=f(1)-f(-1)=0+0+0+\frac{1}{6}[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)]$，$\xi_1,\xi_2\in(-1,1)$.

即：$\frac{1}{2}[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)]=3$. 由 $f'''(x)$ 在 $[-1,1]$ 上C知，$f'''(x)$ 在 $[\xi_2,\xi_1]$ 上

有最小值 m，最大值 M. $\Rightarrow \begin{cases} m\le f'''(\xi_1)\le M \\ m\le f'''(\xi_2)\le M \end{cases} \Rightarrow$

$m\le\frac{1}{2}(f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2))\le M$. 由C函数介值th可知，$\exists\xi\in[\xi_2,\xi_1]\subset(-1,1)$

使 $f'''(\xi)=\frac{1}{2}(f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2))=3$.



$\xi_1\in(0,1)$，$\xi_2\in(-1,0)$、

$[\xi_2,\xi_1]\subset(-1,+1)$

(2). 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\cdots(1+\frac{k}{n^2})\cdots(1+\frac{n}{n^2})$，$n\in N^*$.

解：令 $A_n=(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\cdots(1+\frac{k}{n^2})\cdots(1+\frac{n}{n^2})$，则

$$\ln A_n=\ln(1+\frac{1}{n^2})+\ln(1+\frac{2}{n^2})+\cdots+\ln(1+\frac{k}{n^2})+\cdots+\ln(1+\frac{n}{n^2}) \quad (*)$$

依Taylor公式：$\ln(1+x)=x+o(x)\Rightarrow \ln(1+\frac{k}{n^2})=\frac{k}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})$，$k=1,2,\cdots$

$$\Rightarrow \ln A_n=\frac{1}{n^2}+o_1(\frac{1}{n^2})+\frac{2}{n^2}+o_2(\frac{1}{n^2})+\cdots+\frac{k}{n^2}+o_k(\frac{1}{n^2})+\cdots+\frac{n}{n^2}+o_n(\frac{1}{n^2})$$

$$=\frac{1}{n^2}(1+2+3+\cdots+k+\cdots+n)+o_1(\frac{1}{n^2})+o_2(\frac{1}{n^2})+\cdots+o_n(\frac{1}{n^2})$$

$$=\frac{1}{n^2}\,\frac{1}{2}n(n+1)+o(\frac{1}{n})\longrightarrow\frac{1}{2}\quad(n\to\infty).$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln A_n=\frac{1}{2}\Longleftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}A_n=e^{\frac{1}{2}}$.

此处例(2)是ch3综/第15题，是求"无穷乘积"问题。

这是我们第一次碰到"无穷乘积"问题，它可以通过取对数，再利用Taylor公式，变成"无穷求和"问题来求解。而"无穷求和"问题，我们已经多次遇到，如：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\,\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{1}{3}.$$

即"先求和再取极限"即可解决"无穷求和"问题。