目录

第 1 讲　数列极限

1.1　几个常用的记号

1. $\forall \leftarrow A \leftarrow any$: 任意给定的一个；给定后为常数
2. $\exists \leftarrow E \leftarrow exist$: 存在一个；通常不唯一
3. $\sup E$: 数集 E 的最小上界，即 E 的上确界 (supremum)

   $\sup E$ 同时满足两条件：

   (a) $\forall x \in E, x \leq \sup E$;

   (b) $\forall \varepsilon > 0, \exists\, x_0 \in E, \sup E - \varepsilon < x_0$.
4. $\inf E$: 数集 E 的最大下界，即 E 的下确界 (infimum)

   $\inf E$ 同时满足两条件：

   (a) $\forall x \in E, x \geq \inf E$;

   (b) $\forall \varepsilon > 0, \exists\, x_0 \in E, x_0 < \inf E + \varepsilon$.

例 1.1. 设 $E = \{1, 3, 5, 8\} F = (-\sqrt{3}, \pi]$, 则:
$\sup E = 8, \inf E = 1, \sup F = \pi, \inf F = -\sqrt{3}$. 且有

1. $\sup E = -\inf(-E)$;

2. $\inf F = -\sup(-F)$;

注记. 这里的 $-E$ 表示 E 的相反数集合，即 $-E = \{-e : e \in E\}$.

1.2　微积分或数学分析必须建立在实数系上 R 上

理由: 极限运算时微积分的最基本运算, 而有理数集合 Q 关于极限运算时不封闭的. 例如: $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e; \forall n \in N, (1+\frac{1}{n}) \in Q$, 但 $e \notin Q$.

又如,$\forall n \in N, a_n = \sum\limits_{m=1}^{n} \frac{1}{m^2} \in Q$, 但 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi^2}{6} \notin Q$.

实数集合 R 在数轴上的点是连续不断的, 且关于极限运算时封闭的. 因此, 称实数集 R 是具有连续性. 实数集 R 的连续性也称为实数集的完备性.

描述实数集 R 连续性的公理通常有五个:

1. 确界存在原理;
2. 单调有界极限存在准则;
3. 极限存在的柯西 (Cauchy) 准则;
4. 闭区间套定理;
5. 列紧性原理, 即有界数列必有收敛子列定理.

这五个公理是互相等价的, 本课程采用" 确界存在原理" 作为实数集 R 连续性的公理.

注记. *这五条公理与课本 1.1.3 的连续性公理是等价的, 即任意一个公理都可以推导出另外四个公理. 因此这里说这五个等价命题描述了 R 的连续性.*

公理 1.2. *确界存在原理*

有上 (下) 界的非空实数集 E 必有上 (下) 确界 $\sup E(\inf E)$.

1.3 数列极限的科学定义

设数列 $\{a_n\}$ 以常数 a 为极限, 科学的定义如下:

$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in N*, \forall n > N$ 都有 $|a_n - a| < \varepsilon$ 成立, 则 $\{a_n\}$ 以常数 a 为极限, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 或 $a_n \to a(n \to \infty)$.

事实上, 所有的收敛的有理数列, 其极限点的全体即是实数集 R. 即实数集 R 是有理数列的极限值构成的.

注记. *1.Q 对极限是不封闭的; 2. 由 Q 组成的数列的极限可以是实数; 3. 由 Q 组成的数列的极限只能是实数; 4. 由 Q 组成的所有收敛数列, 他们的极限的集合, 恰好就是 R, 不多不少.*

理由如下:

对 $\forall x \in R$, 设 x 的小数表示为:$x = a_0.a_1a_2a_3\cdots$, 则有理数列:$a_0, a_0.a_1, a_0.a_1a_2, \cdots$ 当 $n \to \infty$ 时, 其极限为 x. 若 x 是有理数, 则 $a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 是有限小数或循环小数, 若 x 是无理数, 则 $a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 是无限不循环小数, 则极限点 x 是无理数.

注记. *此处 $x = a_0.a_1a_2a_3\cdots$, 其中每一个 a_i 都是一个数字, a_0 是整数部分, $a_1a_2a_3\cdots$ 是小数部分. 比如, $x = 3.1415926\cdots$, 那么 $a_0 = 3, a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 1, a_4 = 5, a_5 = 9, a_6 = 2, a_7 = 6, \cdots$.*

可以由 $x = a_0.a_1a_2a_3\cdots$ 构造出一个数列 $\tau_1 = a_0, \tau_2 = a_0.a_1, \tau_3 = a_0.a_1a_2, \cdots$, 说 x 为极限指的, 是 x 是数列 $\{\tau_n\}$ 的极限, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = x$.

都用 x 代指, 是因为我这里不能确定 x 是不是有限小数, 有理数还是无理数. 但是 x 是数列 $\{\tau_n\}$ 的极限是确定的.

1.4 极限存在的两个常用准则

1. 单调有界极限存在准则: 若数列 $\{a_n\}$ 单调增 (减) 且有上 (下) 界, 则 $\{a_n\}$ 收敛. 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup a_n (\inf a_n)$.

2. 夹逼准则 (即两边夹准则): 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 满足 $a_n \le b_n \le c_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

证明. 单调增有界极限存在.

设数列 $\{a_n\}$ 单调增且有上界, 由确界存在定理,$\{a_n\}$ 有上确界. 令 $\sup a_n = \beta$, 则 β 是 $\{a_n\}$ 满足以下两点:

1. $\forall n \in N, a_n \le \beta$;

2. $\forall \varepsilon > 0, \exists a_{n_0} \in \{a_n\}, \beta - \varepsilon < a_{n_0}$.

又因为 $\{a_n\}$ 单调增, 故 $\forall n > n_0, a_n \le a_{n_0} > \beta - \varepsilon$, 且 $a_n \ge \beta < \beta + \varepsilon$. 即 $|\beta - a_n| < \varepsilon$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \beta$. □

证明. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in N*, \forall n > N, |a_n - a| < \varepsilon$. 又 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in N*, \forall n > N, |c_n - a| < \varepsilon$.

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则 $\forall n > N, a_n \le b_n \le c_n$, 故 $a - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < a + \varepsilon$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$. □

例 1.3. 下列 a, b, q, c_1, c_2 皆为常数*)*.

1. 设 $|q| < 1$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} aq^n = 0$;

2. 设 $a > 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$;

3. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;

4. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(c_1a_n + c_2b_n) = c_1a + c_2b$. 即线性组合的极限等于极限的线性组合, 称此为极限的线性性质.

数列的极限具有线性性质, 同理函数极限也是具有线性性质的, 统称为极限的线性性质. 由极限的线性性质, 可导出微积分中绝大多数概念也具有线性性质. 如函数的导数、导数、微分、积分, 都具有线性性质.

作业. ex1.2:1(2)(4);3;4;5;6;8(5);15(1);19.

第 2 讲　数列极限的性质与应用

2.1　复习数列极限的线性性质

设 a, b, c_1, c_2 为常数且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}(c_1a_n + c_2b_n) = c_1a + c_2b = c_1\lim\limits_{n\to\infty} a_n + c_2\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

从上述极限的线性性质，不难得到以下结论：

1. 当 $c_1 = c_2 = 1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;
2. 当 $c_1 = 1, c_2 = -1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;
3. 当 $c_1 = k, c_2 = 0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} ka_n = k\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
4. 数列的线性性质可推广到任意有限个收敛数列的情形: 设 $a_{1n} \to a_1, a_{2n} \to a_2, \cdots, a_{mn} \to a_m$, 且 $a_1, a_2, \cdots, a_m, c_1, c_2, \cdots, c_m$ 为常数, 则
$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}(c_1a_{1n} + c_2a_{2n} + \cdots + c_ma_{mn})\\ =&c_1a_1 + c_2a_2 + \cdots + c_ma_m\\ =&c_1\lim_{n\to\infty} a_{1n} + c_2\lim_{n\to\infty} a_{2n} + \cdots + c_m\lim_{n\to\infty} a_{mn}\end{aligned}$$
对 $\forall m \in N^*$ 成立.

2.2　数列极限的”四性”

1. 有界性: 若 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 有界, 反之未必;
2. 唯一性: 若 $\{a_n\}$ 收敛, 则其极限唯一;
3. 保号性: 若 $\{a_n\}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,$a_n \ge 0, \forall n \ge n_0$, 则必有 $a \ge 0$;
4. 保序性: 若 $a_n \to a, b_n \to b$, 且 $a_n \le (\ge) b_n, \forall n \ge n_0$, 则必有 $a \le (\ge) b$.

2.3 收敛数列极限的四则运算法则

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$, 其中 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0$.

证明. 仅证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{b}(b\neq=0), n\to\infty$

注意到 $\left|\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{1}{b}\right|=\dfrac{|b_n-b|}{|b||b_n|}$

不妨设 $b>0$, 即 $\exists N_1,\forall n>N_1,s.t.b_n>b-\varepsilon$ (a)

取 $\varepsilon<\dfrac{b}{2}$, 则 $b_n>b-\varepsilon\overset{(a)}{=}\dfrac{b}{2}$ (b)

由 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, 对 $\forall\varepsilon>0,\exists N_2,\forall n>N_2,|b_n-b|<\varepsilon$ (c)

得 $\left|\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{1}{b}\right|=\dfrac{|b_n-b|}{|b||b_n|}\overset{(b)}{<}\dfrac{|b_n-b|}{b\frac{b}{2}}\overset{(c)}{<}\dfrac{\varepsilon}{\frac{b^2}{2}}$

□

2.4 例题

例 2.1. 设 $a_n=(1+\dfrac{1}{n})^n, n\in N^*$, 证明:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=e\approx 2.7182818128$;
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e=\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x, x\in R$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e, x\in R$

例 2.2. 证明闭区间套定理: 若 $\{[a_n,b_n]\}$ 是一列闭区间, 满足 $[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}], n=1,2,\cdots$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$, 则存在唯一的实数 ξ, 使得 $\xi\in[a_n,b_n], n=1,2,\cdots$.

注记. 闭区间套定理, 是刻画实数集 R 的连续性的五个等价公理之一.

为了纪念数学家 Euler(欧拉) 在其中的贡献, 将 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n$ 记为 e. 经计算可知,$e\approx 2.718281828$. 讲义中还证明了 e 是一个无理数, 且将以 e 为底的对数称为自然对数, 记为 $\ln x$, 即 $\ln x=\log_e x$.

作业. ex1.2: 14;15(3)(4);16;18(3);22(2)(4);CH1:3(2).

第 3 讲　数列极限习题课

3.1　习题

1. $(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}, n \in N^*$.
2. $(\frac{1}{n+1}) < \ln(1+\frac{1}{n}) < (\frac{1}{n}), n \in N^*$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$, 即 $\sqrt[n]{n!}e \sim n$.

$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n, n \in N^*$, 证明:

1. $\{a_n\}$ 收敛;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} = \ln 2$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3n+1} + \cdots + \frac{1}{3n+2n} = \ln \frac{5}{3}$;
4. $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \sim \ln n$.

3.2　关于无穷大

1. $\{a_n\} \to +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in N^*, \forall n > N, a_n > M$.
2. $\{a_n\} \to -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in N^*, \forall n > N, a_n < -M$.
3. $\{a_n\} \to \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in N^*, \forall n > N, |a_n| > M$.

3.3　Stolz 定理及其应用

定理 3.1 (Stolz 定理)**.** *设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是两个数列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, 若*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = A$$

, 其中 A 可以是有限数, 也可以是 $\pm\infty$;$\{b_n\}$ 是严格单调递增且趋于 $+\infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}.$$

注记. 完整的利用 *Stolz* 定理的过程要求先证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=A$ 极限存在并求得 A, 然后再利用 *Stolz* 定理求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$. 不过不严谨的直接写出 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$ 也是能接受的.

注记 3.2. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=\infty$ 时,*Stolz* 定理不一定成立. 反例可取 $a_n=(-1)^n, b_n=n$.

3.4 例题

例 3.3. 证明:

1. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$;
2. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\geq 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$.
3. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$.

例 3.4. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 是 m 个常数, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_1|^n+|a_2|^n+\cdots+|a_m|^n}=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_m|\}.$$

例 3.5.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\frac{1}{2}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}=\frac{1}{3}$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^4}=\frac{1}{4}$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}=\frac{1}{k+1}$.

定理 3.6. 常用的平均值不等式:

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个正数, 则有:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\leq\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}.$$

作业. ex1.2:9;13;18(5);20;22(3);23;CH1:10(1);11.

第 4 讲　实数集连续性的五个等价命题

4.1　五个等价命题

1. 确界存在原理: 有上 (下) 界的非空实数集 E 必有上 (下) 确界 $\sup E(\inf E)$.

2. 单调有界极限存在准则: 若数列 $\{a_n\}$ 单调增 (减) 且有上 (下) 界, 则 $\{a_n\}$ 收敛. 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup a_n(\inf a_n)$.

3. 闭区间套定理: 若 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一列闭区间, 满足 $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}], n = 1, 2, \cdots$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, 则存在唯一的实数 ξ, 使得 $\xi \in [a_n, b_n], n = 1, 2, \cdots$.

4. 列紧性原理: 若 $\{a_n\}$ 有界且含无穷多项, 则 $\{a_n\}$ 必有收敛子列 $\{a_{n_k}\}$.

5. 柯西 (Cauchy) 准则: 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是: 对 $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in N^*, \forall n, m > N, |a_n - a_m| < \varepsilon$.

例 4.1. *证明确界原理推连续性.*

由 $Y \neq \emptyset$, 故 X 有上界,

由确界原理, X 有上确界, 同理 Y 有下确界, 记 $c_1 = \sup X, c_2 = \inf Y$, (目标: 找到 $c, s.t. \forall a \in X, b \in Y, a \le c \le b$)

若 $c_1 \in X$, 则取 $c = c_1$.

若 $c_1 \notin X$, 则 $c_1 \in Y.c_2 \in Y \Rightarrow c = c_2; c_2 \notin Y \Rightarrow c_2 \in X, c_2 < c_1$ 这与 $\forall x \in X, y \in Y, x < y$ 矛盾.

4.2　Stolz 定理的证明

4.3　例题

例 4.2. *收敛的数列 $\{a_n\}$ 被称为"Cauchy 列"或"基本列".*

1. 设 $a_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}, n \in N^*$, 证明 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 列;

2. 设 $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}, n \in N^*$, 证明 $\{a_n\}$ 不是 Cauchy 列.

4.4 函数极限 24 种科学定义

设 x_0 为常数

$\Rightarrow$ 表示" 则有...", 在此处在 $\Leftrightarrow$ 的子语句之中.

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall 0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon.$
2. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x_0<x<x_0+\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon.$
3. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x_0-\delta<x<x_0\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon.$
4. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists\delta>0,\forall 0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow f(x)>M.$
5. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists\delta>0,\forall x_0<x<x_0+\delta\Rightarrow f(x)>M.$
6. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists\delta>0,\forall x_0-\delta<x<x_0\Rightarrow f(x)>M.$
7. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists\delta>0,\forall 0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow f(x)<-M.$
8. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists\delta>0,\forall x_0<x<x_0+\delta\Rightarrow f(x)<-M.$
9. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists\delta>0,\forall x_0-\delta<x<x_0\Rightarrow f(x)<-M.$
10. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists\delta>0,\forall 0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow |f(x)|>M.$
11. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists\delta>0,\forall x_0<x<x_0+\delta\Rightarrow |f(x)|>M.$
12. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists\delta>0,\forall x_0-\delta<x<x_0\Rightarrow |f(x)|>M.$
13. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists X_0>0,\forall x>X_0\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon.$
14. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists X_0>0,\forall x<-X_0\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon.$
15. $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists X_0>0,\forall |x|>X_0\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon.$
16. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists X_0>0,\forall x>X_0\Rightarrow f(x)>M.$
17. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists X_0>0,\forall x>X_0\Rightarrow f(x)<-M.$
18. $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists X_0>0,\forall |x|>X_0\Rightarrow |f(x)|>M.$
19. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists X_0>0,\forall x<-X_0\Rightarrow f(x)>M.$
20. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists X_0>0,\forall x<-X_0\Rightarrow f(x)<-M.$

21. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists X_0>0, \forall |x|>X_0 \Rightarrow |f(x)|>M.$

22. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists X_0>0, \forall |x|>X_0 \Rightarrow f(x)>M.$

23. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists X_0>0, \forall |x|>X_0 \Rightarrow f(x)<-M.$

24. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists X_0>0, \forall |x|>X_0 \Rightarrow |f(x)|>M.$

作业. ex1.2:17(2)(3)(4),24;CH1:3(1),7,9,10(2),11.

第 5 讲 函数极限 24 种

5.1 数列 $\{a_n\}$ 极限 4 种科学定义

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N\in N^*, \forall n>N, |a_n-a|<\varepsilon.$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} +\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists N\in N^*, \forall n>N, a_n>M.$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} -\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists N\in N^*, \forall n>N, a_n<-M.$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists N\in N^*, \forall n>N, |a_n|>M.$

例 5.1. $\forall k\in N^*$, 证明:$\lim\limits_{n\to\infty} n^k=+\infty.$

5.2 函数极限的 "$\varepsilon-\delta$" 定义法

定义 5.2. *设 x_0 为常数, 函数在 x_0 处的极限为 a 定义为:*

$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x, 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon.$

若 x 从大于 x_0 的一侧趋近于 x_0, 则称为 x_0 的右极限, 记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x, x_0<x<x_0+\delta \Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon$; 若 x 从小于 x_0 的一侧趋近于 x_0, 则称为 x_0 的左极限, 记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x, x_0-\delta<x<x_0 \Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon$.

定理 5.3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=a=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.*($x_0$ 为常数)*

定理 5.4. $\lim\limits_{x\to\infty} =a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x).$

例 5.5. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e.$

5.3 函数极限的四则运算法则

定理 5.6. *设 x_0, a, b, c_1, c_2 为常数, 令 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, 则:*

1. $\lim\limits_{x\to x_0} (c_1 f(x) + c_2 g(x)) = c_1 a + c_2 b$;
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = a\cdot b$; *特别地*, $\lim\limits_{x\to x_0} f^2(x) = a^2$;
3. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}(b\neq 0)$.

注记 5.7. *函数极限:* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \in R$ *也是有"四性", 即局部有界性, 唯一性, 保号性, 保序性.*

注记 5.8. *局部有界性的证明: 设函数* $y = f(x)$ *的定义域为* I, *点* $x_0 \in I$, *且* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon \Leftrightarrow |f(x)| < |a| + \varepsilon$. *因此, 函数* $f(x)$ *在* x_0 *的某邻域内有界, 但* $f(x)$ *在整个定义域* I *内未必有界.*

5.4 3 个重要极限及其证明

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$;
2. $\lim\limits_{x\to\infty} (1 + \dfrac{1}{x})^x = e$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, & n = m; \\ 0, & n < m; \\ \infty, & n > m. \end{cases}$

作业. ex1.3:1(2)(3);2(2)(4);3(2);5(1)(2);9(3)(4);10(3);CH1:13.

第 6 讲 函数极限习题课

6.1 24 种函数极限的否定形式

设 x_0, A 为常数.

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq A \Leftrightarrow \exists\varepsilon_0 > 0, \forall\delta > 0, \exists x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| \geq \varepsilon_0$.

2. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq A \Leftrightarrow \exists\varepsilon_0>0, \forall\delta>0, \exists x, x_0<x<x_0+\delta \Rightarrow |f(x)-A| \geq \varepsilon_0$.
3. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq A \Leftrightarrow \exists\varepsilon_0>0, \forall\delta>0, \exists x, x_0-\delta<x<x_0 \Rightarrow |f(x)-A| \geq \varepsilon_0$.
4. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq +\infty \Leftrightarrow \exists M>0, \forall\delta>0, \exists x, 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x) \leq M$.
5. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq +\infty \Leftrightarrow \exists M>0, \forall\delta>0, \exists x, x_0<x<x_0+\delta \Rightarrow f(x) \leq M$.
6. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq +\infty \Leftrightarrow \exists M>0, \forall\delta>0, \exists x, x_0-\delta<x<x_0 \Rightarrow f(x) \leq M$.
7. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq -\infty \Leftrightarrow \exists M>0, \forall\delta>0, \exists x, 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x) \geq -M$.
8. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq -\infty \Leftrightarrow \exists M>0, \forall\delta>0, \exists x, x_0<x<x_0+\delta \Rightarrow f(x) \geq -M$.
9. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq -\infty \Leftrightarrow \exists M>0, \forall\delta>0, \exists x, x_0-\delta<x<x_0 \Rightarrow f(x) \geq -M$.
10. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq \infty \Leftrightarrow \exists M>0, \forall\delta>0, \exists x, 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)| \leq M$.
11. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq \infty \Leftrightarrow \exists M>0, \forall\delta>0, \exists x, x_0<x<x_0+\delta \Rightarrow |f(x)| \leq M$.
12. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq \infty \Leftrightarrow \exists M>0, \forall\delta>0, \exists x, x_0-\delta<x<x_0 \Rightarrow |f(x)| \leq M$.
13. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) \neq A \Leftrightarrow \exists\varepsilon_0>0, \forall X_0>0, \exists x, x>X_0 \Rightarrow |f(x)-A| \geq \varepsilon_0$.
14. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) \neq A \Leftrightarrow \exists\varepsilon_0>0, \forall X_0>0, \exists x, x<-X_0 \Rightarrow |f(x)-A| \geq \varepsilon_0$.
15. $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) \neq A \Leftrightarrow \exists\varepsilon_0>0, \forall X_0>0, \exists x, |x|>X_0 \Rightarrow |f(x)-A| \geq \varepsilon_0$.
16. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) \neq +\infty \Leftrightarrow \exists M>0, \forall X_0>0, \exists x, x>X_0 \Rightarrow f(x) \leq M$.
17. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) \neq -\infty \Leftrightarrow \exists M>0, \forall X_0>0, \exists x, x>X_0 \Rightarrow f(x) \geq -M$.
18. $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) \neq \infty \Leftrightarrow \exists M>0, \forall X_0>0, \exists x, |x|>X_0 \Rightarrow |f(x)| \leq M$.
19. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) \neq +\infty \Leftrightarrow \exists M>0, \forall X_0>0, \exists x, x<-X_0 \Rightarrow f(x) \leq M$.
20. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) \neq -\infty \Leftrightarrow \exists M>0, \forall X_0>0, \exists x, x<-X_0 \Rightarrow f(x) \geq -M$.
21. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) \neq \infty \Leftrightarrow \exists M>0, \forall X_0>0, \exists x, |x|>X_0 \Rightarrow |f(x)| \leq M$.
22. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) \neq +\infty \Leftrightarrow \exists M>0, \forall X_0>0, \exists x, |x|>X_0 \Rightarrow f(x) \leq M$.
23. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) \neq -\infty \Leftrightarrow \exists M>0, \forall X_0>0, \exists x, |x|>X_0 \Rightarrow f(x) \geq -M$.
24. $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) \neq \infty \Leftrightarrow \exists M>0, \forall X_0>0, \exists x, |x|>X_0 \Rightarrow |f(x)| \leq M$.

注记 6.1. *24 种函数极限的肯定形式 (科学定义) 在第 4 讲: 实数集连续性的五个等价命题的附 (3) 与附 (4) 两页中.(助教注: 即 4.4). 先写出每种极限的肯定形式, 就容易写出对应的否定形式.*

6.2 几个基本概念

(1) 以零为极限的变量称为无穷小量; 绝对值无限增大的变量称无穷大量. 常数中只有零是无穷小量, 非零无穷小与无穷大具有倒数关系.

例 6.2. $x \to 0$ 时,$\sin x, x^m(m>0), \tan x, e^x-1, 1-\cos x$ 都是无穷小量;

$n \in N^*, n \to$ 时, $n^n, n!, a^n(a>1), n^A(A>0), \ln n$ 都是无穷大量.

(2) 若函数 $f(x)$ 在 x_0 处有定义, 且 $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 若 $f(x)$ 在区间 I 上每一点都连续, 则称 $f(x)$ 在 I 上连续. 当 $f(x)$ 在 x_0 处连续时, 有 $f(x_0)=f(\lim\limits_{x\to x_0} x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, 即连续函数的极限与函数值可以交换次序.

(3) 幂 (x^A, A 为常量), 指数 ($a^x, a>0$), 三角函数 ($\sin x, \cos x, \tan x$), 对数函数 ($\log_a x, a>0, a\neq 1$), 指数函数 (e^x), 反三角函数 ($\arcsin x, \arccos x, \arctan x$), 双曲函数 ($\sinh x, \cosh x, \tanh x$) 等函数在其定义域内均连续.

一切基本初等函数, 在其定义域内均连续.

6.3 无穷大的大小

例 6.3. 设 a, A, m 为常数, 且 $a>1, A>0, m>0$, 证明:

1. $n^n >> n! >> a^n >> n^A >> (\ln n)^m$, 在 $n\to\infty, n\in N^*$ 时成立; 其中 $n^n >> n! \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{n!}=+\infty$, 称为 n^n 是 $n!$ 的高阶无穷大.
2. $x^x >> a^x >> x^A >> (\ln x)^m$, 在 $x\to+\infty, x>0, x\in R$ 时成立.

6.4 例题

例 6.4. 证明:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$;

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1;$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a, a>0, a\neq 1.$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^A-1}{x}=A, A\neq 0.$

7. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}.$

8. $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{x^2+3x-5}{x^2+6})^{4x}=e^{12}.$

注记. *上述例* $1\sim 6$ *今后可作为公式直接使用, 并可记为: 当* $\rightarrow 0$ *时,*

1. $\dfrac{1-\cos x}{x^2}\sim\dfrac{1}{2};$

2. $\arcsin x\sim x;$

3. $\ln(1+x)\sim x;$

4. $l^x-1\sim x;$

5. $a^x-1\sim\ln a\cdot x;$

6. $(1+x)^A-1\sim A\cdot x.$

作业. ex1.3:4;9(1)(2);10(1)(2)(4);11(1)(2).

第 7 讲　函数连续性与无穷小 (大) 的比较

7.1　函数 $y=f(x)$ 的连续性

设 x_0 是常数,

(1) $f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=f(\lim\limits_{x\to x_0}x)$.

(2) $f(x)$ 在 x_0 处间断 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$: 称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

$f(x)$ 的间断点分类: $\begin{cases}\text{(I) } f(x_0-0), f(x_0+0) \text{ 均存在的间断点为第一类间断点;}\\ \text{(II) } f(x_0-0), f(x_0+0) \text{ 至少有一个不存在的间断点为第二类间断点.}\end{cases}$

例 7.1. 六类基本初等函数 *(幂, 指数, 三角, 对数, 指数, 反三角, 双曲)* 在其定义域内均连续. 如 $f(x)=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ 在 $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ 时连续, 且从 $f(\dfrac{\pi}{2}-0)=+\infty, f(\dfrac{\pi}{2}+0)=-\infty$ 可知 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处第二类间断点.

又如 $f(x)=sgnx=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x<0.\end{cases}$ 在 $x=0$ 处, $f(0-0)=-1, f(0+0)=1, f(0)=0$, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处第一类间断点.*(跳跃间断点)*

定理 7.2. 连续函数的和, 差, 积, 商仍是连续函数.

例 7.3. 设 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)$ 在区间 I 上连续, 且 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 为常数, 则线性组合 $c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\cdots+c_mf_m(x)$ 在 I 上连续. 这表明连续函数具有线性性.

例 7.4. 连续的函数 $y=f(x)$ 若有反函数 $x=g(y)$ 或写为 $y=g(x)$, 则反函数 $y=g(x)$ 也是连续函数. 理由: 函数与其反函数关于直线 $y=x$ 对称.

例 7.5. $y=\sin x$ 在 $[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$ 上连续且单调增, 故有反函数 $x=\arcsin y$ 在 $[-1,1]$ 上连续.

$y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上连续且单调减, 故有反函数 $x=\arccos y$ 在 $[-1,1]$ 上连续且单调减.

$y=\tan x$ 在 $(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 上连续且单调增, 故有反函数 $x=\arctan y$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且单调增.

注记. 六个反三角函数都是有界变量

例 7.6. e^x 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且单调增, 故有反函数 $x=\ln y$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续且单调增.

定理 7.7. 连续函数的符合函数仍是连续函数.

由六种基本初等函数经过有限次四则运算, 有限次符合运算的函数统称为初等函数.

定理 7.8. 一切初等函数, 包括一切基本初等函数, 在其定义域内均连续.*(注: 初等函数的的定义域中若存在孤立点 x_0, 则 $f(x)$ 在 x_0 处仍是连续的.)*

7.2 无穷小量的比较

设 $x \to x_0$ 时,$A(x) \to 0, \beta \to 0$ 且 $(\beta(x) = 0)$.

(1) 若 $\lim_{x \to x_0} \frac{A(x)}{\beta(x)} = 0$, 则称 $A(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小, 记为 $A(x) = o(\beta(x))$; 例如 $\lim_{x \to 0} \frac{\tan^2 x}{x} = 0 \Rightarrow \tan^2 x = o(x)$.

(2) 若 $\lim_{x \to x_0} \frac{A(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, 则称 $A(x)$ 是 $\beta(x)$ 的等阶无穷小, 记为 $A(x) = O(\beta(x))$; 例如 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \sin x = O(x)$.

(3) 若 $\lim_{x \to x_0} \frac{A(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, 则称 $A(x)$ 是 $\beta(x)$ 的等价无穷小, 记为 $A(x) \sim \beta(x)$; 例如 $\sin x \sim x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim \tan x (x \to 0); 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, a^x - 1 \sim \ln a \cdot x, (1+x)^A - 1 \sim A \cdot x (x \to 0)$.

(4) 当 $x \to x_0$ 时, 若 $\exists k \in R^+$, 使得 $A(x) = O((x - x_0)^k)$, 则称 $A(x)$ 是 $(x - x_0)$ 的 k 阶无穷小

例 7.9. 当 $x \to 0$ 时, 证明: 无穷小量 $\tan x - \sin x$ 是 x 的三阶无穷小.

7.3 无穷大量的比较

设 $x \to x_0$ 时,$A(x) \to \infty, \beta \to \infty$ 且 $(\beta(x) = 0)$.

(1) 若 $\lim_{x \to x_0} \frac{A(x)}{\beta(x)} = 0$, 则称 $\beta(x)$ 是 $A(x)$ 的高阶无穷大, 记为 $A(x) = o(\beta(x))$; 如当 $n \to \infty$ 时, $n! = o(n^n); e^n = o(n!); n^2 = o(n!)$.

(2) 若 $\lim_{x \to x_0} \frac{A(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, 则称 $\beta(x)$ 是 $A(x)$ 的等阶无穷大, 特别地当 $A = 1$ 时, 称 $A(x)$ 是 $\beta(x)$ 的等价无穷大, 记为 $A(x) \sim \beta(x)$; 如当 $n \to \infty$ 时, $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \ln n; n \sim e\sqrt[n]{n}$.

熟练掌握个别关系式:$(\forall a > 1, A > 0, m > 0)$

$$n^n >> n! >> a^n >> n^A >> (\ln n)^m;$$

$$x^x >> a^x >> x^A >> (\ln x)^m;$$

7.4 等价代换

在积与商的极限中, 无穷小 (大) 因子可用等价无穷小 (大) 代换, 而不影响原来的极限值.

设 $x \to x_0$ 时, $A(x) \sim A_1(x), \beta(x) \sim \beta_1(x)$, 则
$\lim_{x \to x_0} \frac{A(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{A(x)}{A_1(x)} \cdot \frac{A_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{A_1(x)}{\beta_1(x)}$.

作业. ex1.3:16;17;18.

第 8 讲 再论函数连续性及无穷小 (大) 的比较

8.1 函数极限的" 四性"

(1) 唯一性.$f(x)$ 在 x_0 处有极限, 则极限值唯一.

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A_1$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A_2$. 若 $A_1>A_2$, 则 $\epsilon=\dfrac{A_1-A_2}{2}>0$, 则 $\exists\delta_1>0,\forall x,0<|x-x_0|<\delta_1\Rightarrow|f(x)-A_1|<\epsilon$; 又 $\exists\delta_2>0,\forall x,0<|x-x_0|<\delta_2\Rightarrow|f(x)-A_2|<\epsilon$. 取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则 $\forall x,0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|A_1-A_2|<\epsilon$, 矛盾.

(2) 局部有界性.

从 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\in\overline{U}(x_0,\delta)=(x_0-\delta)\cup(x_0+\delta)\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon\Rightarrow|f(x)|<|A|+\varepsilon,\forall x\in\overline{U}(x_0,\delta)$.

(3) 保号性.

若 $f(x)\geq 0,\forall x\in\overline{U}(x_0,\delta)$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\geq 0$.

(4) 保序性.

若 $f(x)\geq g(x)$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\geq\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

8.2 函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续的四个充要条件

1. $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x,0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$;
2. $f(x_0-0)=f(x_0)=f(x_0+0)$,i.e. $f(x)$ 在 x_0 处既左连续又右连续;
3. $f(x)=f(x_0)+A(x),A(x)\to 0(x\to x_0)$;
4. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$, 其中 $\Delta x=x-x_0,\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

8.3 几个常用的记号

$\delta>0$ 为常数, 设 $A(x)\to 0(\infty),\beta(x)\to 0(\infty),x\to x_0$.

1. 点 x_0 的 δ 邻域:$U(x_0,\delta)=\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$;

2. 点 x_0 的去心 δ 邻域:$U^*(x_0,\delta)=\{x|0<|x-x_0|<\delta\}\backslash\{x_0\}$;

3. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{A(x)}{\beta(x)}=0$, 则记为 $A(x)=o(\beta(x))$; 表示 $A(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小, 或者说 $\beta(x)$ 是 $A(x)$ 的高阶无穷大;

4. 若 $\exists M>0, s.t. |A(x)|\le M|\beta(x)|, \forall x\in U^*(x_0,\delta)$, 则记为 $A(x)=O(\beta(x))$;

   注记. 助教注: 这里的比如 $o(x)$ 表示的是函数集合 $\{f|\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x}=0\}$, 而 $O(x)$ 表示的是函数集合 $\{f|\exists M>0, \exists\delta>0, \forall x\in U^*(x_0,\delta)\Rightarrow|f(x)|\le M|x|\}$. 也就是说,$x^2=o(x), x\to 0$ 表示的实际是 $x^2\in o(x)$.

例 8.1. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{A(x)}{\beta(x)}=A\neq 0$, 则 $A(x)=O(\beta(x)), x\in U^*(x_0,\delta)$. 此时称 $A(x)$ 与 $\beta(x)$ 为同阶无穷小 (大), 且 $A(x)\sim A\beta(x), x\to x_0$.

例 8.2. 设 $a_n=\ln n, b_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}, c_n=n, d_n=\sqrt[n]{n!}$, 则 $n\to\infty$ 时,$a_n,b_n,c_n,d_n\to\infty$, 且 $a_n=o(b_n), b_n=o(c_n), c_n=o(d_n)$.

例 8.3. 当 $x\to x_0$ 时候, 证明:

1. $o(A(x))\cdot o(\beta(x))=o(A(x)\cdot\beta(x))$;

2. $O(A(x))\cdot O(\beta(x))=O(A(x)\cdot\beta(x))$;

3. $O(o(A(x)))=o(A(x))$;

4. $o(O(A(x)))=o(A(x))$.

注记. 助教注: 这里的 $o(A(x))o(\beta(x))$ 表示的是集合相乘, 即 $o(A(x))o(\beta(x))=\{fg|f\in o(A(x)), g\in o(\beta(x))\}$.

8.4 间断点

$f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续是指 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上每一点都连续, 即 $f(x)$ 在 (a,b) 的每一点都连续, 且 $f(a+0)=f(a), f(b-0)=f(b)$.

(x) 在 $[a,+\infty)$ 上连续是指 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 的每一点都连续, 且 $f(a+0)=f(a)$.

若 $f(x)$ 在 x_0 处间断, 则

1. $f(x_0-0), f(x_0+0)$ 均存在且相等 $\Leftrightarrow x_0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点;

2. $f(x_0-0), f(x_0+0)$ 均存在且不相等 $\Leftrightarrow x_0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点;

3. $f(x_0-0)=\infty, f(x_0+0)=\infty \Leftrightarrow x_0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点;

4. $f(x_0-0)=-\infty, f(x_0+0)$ 至少有一个不存在, 且 $f(x_0-0)\neq\infty, f(x_0+0)\neq\infty \Leftrightarrow x_0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点中的其它间断点.

8.5 几个特别地非初等函数的连续性

1. (1) 狄利克雷 (Dirichlet) 函数:$D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q;\\ 0, & x\in R-Q.\end{cases}$

   则 (1°) 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界, 且是周期函数, 任意一个正有理数都是 $D(x)$ 的周期, 从而 $D(x)$ 不存在最小正周期;

   (2°) $D(x)$ 在任意一点都不连续, 即 $D(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处间断;

   (3°) $g(x)=xD(x), x\in R$, 则 $g(x)$ 仅在 $x=0$ 处连续.

2. Riemann 函数:$R(x)=\begin{cases}1, & x=0;\\ \dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}(p,q\in Z, q\neq 0, (p,q)=1);\\ 0, & x\in R-Q.\end{cases}$

   则 (1°) $R(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处有定义, 有界且周期为 1;

   (2°) $R(x)$ 在任意一点 x_0 处极限为 0,i.e. $\lim\limits_{x\to x_0} R(x)=0, \forall x_0\in R$;

   (3°) $R(x)$ 在任一无理点处都连续, 在有理点处都为可去间断点.

3. $\xi(x)\triangleq\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^A}, x\in(1,+\infty)$,

   $\xi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上处处连续, 处处可微. 且 $\xi(x)\in C^{\infty}(1,+\infty)$,i.e. $\xi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上处处具有任意阶连续的导函数.

4. $\Gamma(x)\triangleq\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt, x>0$,

   $\Gamma(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续, 处处可微, 且 $\Gamma(x)\in C^{\infty}(0,+\infty)$.

作业. ex2.1:4,5,6(2)(4)(5),7,8,17(1)(3)(4).

第 9 讲 闭区间 $[a, b]$ 上连续函数的五大性质

9.1 一致连续性

设 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 则 $\forall x_0 \in I$, 有 $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\epsilon, x_0) > 0, \forall |x - x_0| < \delta |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ 恒成立.

若对 $\varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall x_1, x_2 \in I, |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, 则称 $f(x)$ 在 I 上一致连续.

由此可见, 一直连续是比连续条件更强的连续. 凡在 I 上一致连续的函数, 必在 I 上连续, 但反之不然.

例 9.1. 证明 $f(x) = \sin x$ 在 R 中一致连续.

例 9.2. 证明 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上连续但不一致连续.

9.2 五大特性

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有如下五大性质:

性质 1 零值性: 若 $f(a)f(b) < 0$, 则 $\exists x_0 \in (a, b), s.t. f(x_0) = 0$. 称 x_0 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的零点.

性质 2 介值性: 若存在常数 h, 使 $f(a) < h < f(b)$, 则 $\exists x_0 \in (a, b), s.t. f(x_0) = h$.

性质 3 有界性:$\exists M > 0, s.t. |f(x)| \leq M, \forall x \in [a, b]$.

性质 4 最值性: 必 $\exists x_1, x_2 \in [a, b], s.t. f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \forall x \in [a, b]$. 称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有最大值和最小值.

性质 5 一致连续性: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致连续.

例 9.3. 证明方程 $x^7 + \epsilon^x = 3$ 在 $(0, 1)$ 内存在唯一实根.

例 9.4. 设 $f(x) \in C[a, b]$, 且 $f([a, b]) = [a, b]$, 则 $\exists x_0 \in [a, b], s.t. f(x_0) = x_0$.

作业. ex2.2:1,2,3,5,6,7,8,9;CH2:6.

第 10 讲 函数极限连续性习题课

10.1 熟练掌握以下 6 个等价无穷小

设 $u \to 0$,

1. $\sin u \sim u$;
2. $1 - \cos u \sim \frac{u^2}{2}$;
3. $e^u - 1 \sim u$;
4. $a^u - 1 \sim \ln a \cdot u$;
5. $\ln(1+u) \sim u$;
6. $(1+ku)^A - 1 \sim Aku$.

其中 $a > 0, a \neq 1, k, A$ 为常数, 且 $kA \neq 0$.

10.2 掌握以下一批等价无穷小

设 $u \to 0, \forall m > 0$,

1. $\sin^m u \sim u^m$;
2. $(1 - \cos u)^m \sim (\frac{1}{2}u^2)^m$;
3. $(e^u - 1)^m \sim u^m$;
4. $(a^u - 1)^m \sim (\ln a \cdot u)^m$;
5. $(\ln(1+u))^m \sim u^m$;
6. $(\tan u)^m \sim u^m$;
7. $(\arcsin u)^m \sim u^m$;
8. $(\arctan u)^m \sim u^m$;
9. $(\tan u - \sin u) \sim \frac{1}{2}u^3$.

10.3 熟练掌握以下等价无穷大

$n \in N^*, x \in R^+, \forall a > 1, A > 0, m > 0,$

1. $n^n >> n! >> a^n >> n^A >> (\ln n)^m$;($n$ 充分大)
2. $x^x >> a^x >> x^A >> (\ln x)^m$;($x$ 充分大)

10.4 熟练掌握以下两个等价无穷大

n 充分大时,

1. $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \ln n$;
2. $\sqrt[n]{n!} \sim \frac{1}{e} n$.

作业. ex2.2:7,8,9,13;CH2:1,2,3,5.

第 11 讲 函数的导数与 18 个求导基本公式

11.1 导数的定义

设函数 $y = f(x)$ 在 $\overline{U}(x_0, \delta)$ 上有定义, $x + \Delta x \in \overline{U}(x_0, \delta)$. 若

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = a \in R.$$

则称常数 a 为函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处的导数 (derivative), 记为 $f'(x_0) = a$, 即 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = a = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. 并称 $f(x)$ 在 x_0 处可导.

此时, 有 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + A(x), A(x) \to 0 (x \to x_0) \Rightarrow \Delta y = f'(x_0)\Delta x + A(x)\Delta x \to 0 (\Delta x \to 0)$. 即 $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, 即 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

这即" 可导必连续", 但" 连续不一定可导".

例 11.1. *设 $f(x) = |x|$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续但不可导.*

记:$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. 分别称 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$ 为 $f(x)$ 在 x_0 处的左导数和右导数.

定理 11.2. *$f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow f'_-(x_0), f'_+(x_0)$ 均存在且相等.*

若 $f(x)$ 在区间 I 上每一点 x 处都可导, 则称 $f(x)$ 在 I 上可导, 并称 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 为 $f(x)$ 的导函数.

例 11.3. *设 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 求曲线 $y=f(x)$ 上点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线方程与法线方程.*

切线方程:$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$;

法线方程:$y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.(设 $f'(x_0)\neq 0$)

从例 11.3知, 导数 $f'(x_0)$ 的几何意义是过切点 $M(x_0,y_0)$ 的切线的斜率.

例 11.4. *设质点的运动方程为 $s=f(t)$, 则质点在 t_0 时刻的速度 $v=f'(t_0)$. 这也是导数的物理意义.*

从纯数学的角度来说,$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 是因变量的增量相对于自变量而言的相对变化率. 例如, 若 $f'(x_0)=5$, 则可认为自变量 x 在 x_0 处有 1% 的变化时, 则因变量 y 在 x_0 处有 5% 的变化. 余类推.

11.2 18 个求导基本公式

设 C,a,A 为常数,$a>0,a\neq 1$.

(1). $(C)'=0$;

(2). $(a^x)'=a^x\ln a$;

(3). $(e^x)'=e^x$;

(4). $(x^A)'=Ax^{A-1}$;

(5). $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$;

(6). $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$;

(7). $(\sin x)'=\cos x$;

(8). $(\cos x)'=-\sin x$;

(9). $(\tan x)'=\sec^2 x$;

(10). $(\cot x)'=-\csc^2 x$;

(11). $(\sec x)'=\sec x\tan x$;

(12). $(\csc x)'=-\csc x\cot x$;

(13). $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x|<1$;

(14). $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,$|x|<1$;

(15). $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$,$x\in R$;

(16). $(\mathrm{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$,$x\in R$;

(17). $(\sinh x)'=\cosh x$;

(18). $(\cosh x)'=\sinh x$.

称 $\sinh x,\cosh x$ 为双曲正弦与双曲余弦.

11.3 三大求导法则

求导的四则运算法则, 反函数的求导法则及复合函数求导法则称为" 求导三大法则". 可以证明, 在" 三大求导法则" 下, 上述 18 个基本公式可以化简为 1 个求导公式:$(e^x)' = e^x$.

作业. ex3.1:1(1),2(2),4,7(6)(8)(13),11(1),14(2)(4),15,16.

第 12 讲 求导三大法则及其应用

12.1 求导的四则运算法则

设 $u(x), v(x)$ 在 x 处可导,c_1, c_2 为常数, 则

1. $(c_1u(x) \pm c_2v(x))' = c_1u'(x) \pm c_2v'(x)$;(可推广到任意有限个函数的和差的求导) 特别地, 当 $c_1 = 1, c_2 = \pm 1$ 时, 有 $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$;
2. $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$;(可推广到任意有限个函数的积的求导)
3. $(\frac{u(x)}{v(x)})' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}, v(x) \neq 0$. 特别地, 当 $u(x) = 1$ 时, 有 $(\frac{1}{v(x)})' = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}$.

12.2 反函数求导法则

设 $y = f(x)$ 在 x 处可导, 且 $f'(x) \neq 0$, 则 $f(x)$ 在 x 处可逆, 且其反函数 $x = \varphi(y)$ 在 $y = f(x)$ 处可导, 且有 $\varphi'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$, 或者有 $\varphi'(y)f'(x) = 1, \forall x \in I$.

注记. *助教注: 一般而言, 微商是对于自变量与因变量说的, 形如 $\frac{dy}{dx}$, 而导数是对于函数说的, 形如 $f'(x)$. 如果还是模糊, 可以先放着, 等下一章学了微元之后再理解, 目前可认为微商 $\frac{dy}{dx}$ 在给出 $y = f(x)$ 关系之后与 $f'(x)$ 数值上相等.*

12.3 复合函数求导法则

设 $y = f(u), u = g(x)$ 均在 x 处可导, 则复合函数 $y = f(g(x))$ 在 x 处可导, 且有 $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

中间变量为任意有限个时, 上述结论仍成立.

例 12.1. 设 $x>0, a>0, a\neq 1$, 求 $y=x^x+x^{x^x}+a^{x^a}+x^{a^x}+x^{a^a}+a^{a^x}+a^{a^a}$ 的导数.

$$\begin{aligned}y' &= x^x(1+\ln x)+x^{x^x}(\ln x\cdot x^x(1+\ln x)+x^{x-1})+a^{x^a}(ax^{a-1}\ln a)\\ &\quad +x^{a^x}(a^x\ln a\ln x+\frac{a^x}{x})+x^{a^a-1}a^a+a^{a^x}(a^x(\ln a)^2)+0\end{aligned}$$

作业. ex3.1:1(4)(5)(6);2(1);3;5;7(4)(10)(16);14(1)(3).

第 13 讲　求导运算习题课

13.1　求下列函数的导数

1. $\left(x^{x^x}+a^{x^a}+x^{a^x}+x^{a^a}+a^{a^x}+a^{a^a}\right)'$
2. 设 $u(x), v(x)$ 皆可导, 且 $u(x)>0, y=u(x)^v(x)$, 求 $\dfrac{dy}{dx}$.
3. 求 $y=xe^x$ 的反函数的导数 $\dfrac{dx}{dy}$.

13.2　习题 3.1

例 13.1. 若函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导,A, β 为常数, 证明:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+Ah)-f(x_0-\beta h)}{h}=f'(x_0)(A+\beta).$$

例 13.2. 求下列函数的导数:

1. $y=\sin(\cos^5(\arctan x^3))$;
2. $y=\ln(\ln^2(\ln^3 x))$;
3. $y=\dfrac{(x+5)^2(x-4)^{1/3}}{(x+2)^5(x+4)^{1/2}}$.

例 13.3. 设 $f(x)=x^3$, 求 $f'(x^2)$ 与 $(f'(x^2))'$.

例 13.4. 设 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2}), g(x)=e^{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $(f(g(x)))', f'(g(x))$.

例 13.5. 设 $f(x)$ 处处可导, 求 $\dfrac{dy}{dx}$,

1. $y = \sin(f(\sin f(x)))$;

2. $y = f(f(f(\sin x + \cos x)))$.

例 13.6. 设 n 为正整数，考虑函数

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

证明:

(1) 当 $n = 1$ 时,$f(x)$ 在点 $x = 0$ 处不可导;

(2) 当 $n = 2$ 时,$f(x)$ 在点 $x = 0$ 处可导, 但导函数在 $x = 0$ 处不连续（事实上, 在这一点有第二类间断）;

(3) 当 $n \geq 3$ 时,$f(x)$ 在点 $x = 0$ 处可导, 且导函数在 $x = 0$ 处连续.

例 13.7. 求函数的反函数的微商. $y = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}})$.

例 13.8. 证明: 可导的偶函数的导数为奇函数, 而可导的奇函数的导数为偶函数.

例 13.9. 证明: 可导的周期函数的导数仍是周期函数.

例 13.10. 求下列各式的和:

1. $P_n = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$;

2. $Q_n = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1}$;

3. $R_n = \cos 1 + 2\cos 2 + \cdots + n\cos n$.

作业. ex3.1:1(2)(3);7(13)(16)(18);8;10(2)(6);11(2);14(2);CH3:1.

第 14 讲 函数 $f(x)$ 的高阶导数

14.1 高阶导数的定义, 记号与重要性质

(1) $f''(x) = (f'(x)) \triangleq \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x} \triangleq f^{(2)}(x) \triangleq \dfrac{d^2y}{dx^2}$;

(2) $f'''(x) = (f''(x)) \triangleq \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f''(x + \Delta x) - f''(x)}{\Delta x} \triangleq f^{(3)}(x) \triangleq \dfrac{d^3y}{dx^3}$;

(3) $f^{(n)}(x)=\dfrac{d^n y}{dx^n}, n=2,3,\cdots.$

规定 $f^{(0)}(x)=f(x)$. 且二阶以上的导数称为高阶导数.

14.2 高阶导数的性质

高阶导数具有先行性质: 设 $u(x),v(x)$ 均有 n 阶导数,c_1,c_2 为常数, 则

(1) $(c_1u(x)\pm c_2v(x))^{(n)}=c_1u^{(n)}(x)\pm c_2v^{(n)}(x)$;

(2) $(u\cdot v)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x)$(Leibniz 公式)$n\in N^*$,

利用其中 u,v 的对称性,leibniz 公式也可以写为:

(3) $(u\cdot v)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x)$;

14.3 几个常用的高阶导数公式

(1) $(\sin x)^{(n)}=\sin(x+\dfrac{n\pi}{2})$, $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+\dfrac{n\pi}{2})$;

(2) $(e^x)^{(n)}=e^x$,$(a^x)^{(n)}=(\ln a)^n a^x$;

(3) $\left(\dfrac{1}{x+a}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$, $(\ln(x+a))^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+a)^n}$;

(4) $(x^m)^{(n)}=\begin{cases}0 & n<m;\\ n! & n=m;;\\ n(n-1)\cdots(n-m+1)x^{n-m} & n>m.\end{cases}$

14.4 例题

例 14.1. $P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\left((x^2-1)^n\right)^{(n)}$. *称之为 n 阶 Legendre 多项式, 证明:$P_n(x)$ 是下列 n 阶 Legendre 方程的解:* $(x^2-1)y''-2xy'+n(n+1)y=0$.

例 14.2. *设* $f(x)=\arctan x$, *求* $f^{(n)}(x),f^{(98)}(0),f^{(99)}(0)$.

例 14.3. *求* $f^{(n)}(x)$,

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+6x+5}$, (2) $f(x)=(4x^2+5x+1)\cos x$.

作业. ex3.1:7(3),(12);14;18;19;20;21;22.

第 15 讲 函数的微分

15.1 定义与性质

设 $y = f(x)$ 在 $\overline{U}(x_0, \delta)$ 上有定义,$x_0 + \Delta x \in \overline{U}(x_0, \delta)$. 若 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + A(x)\Delta x$, 其中 $A(x) \to 0(x \to x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处可微, 且将 Δy 的线性主部分 $A\Delta x$ 称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的微分, 记作 $dy\big|_{x_0} = A\Delta$ 或 $df(x)\big|_{x_0} = A\Delta x$.

若 $y = f(x)$ 在区间 I 上每一点 x 处都可微, 则称 $f(x)$ 在 I 上可微, 此时 $df(x) = A\Delta x, x \in I$.

定理 15.1. *$y = f(x)$ 在 x_0 处可微 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 处可导*

由 $df(x) = f'(x)\Delta x \Rightarrow dx = (x)'_x \Delta x = \Delta x$, 即自变量的微分等于自变量的增量. 于是 $df(x) = dy = f'(x)dx$.

微分 $df(x)\big|_{x_0}$ 的几何意义是曲线 $y = f(x)$ 上点 $M(x_0, y_0)$ 处的切线的增量. 由 $df(x)\big|_{x_0} = f'(x_0)\Delta x$ 知, $df(x)\big|_{x_0} = dy\big|_{x_0}$ 是切线在 x_0 的增量.$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \approx f'(x_0)\Delta x = df(x)\big|_{x_0}$ 表明曲线 $y = f(x)$ 在 x_0 处的增量 Δy, 在局部可用相应切线上的增量 $f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)(x - x_0)$ 代替, 也即局部线性化.

注记. *助教注:*

某一点 m 次可微, 该点 $m-1$ 次连续, 在邻域内 $m-2$ 次连续.

从 $df(x) = f'(x)dx$ 及导数的四则运算法则可得以下微分四则运算法则:

设 $u(x), v(x)$ 在 x 处可微,c_1, c_2 为常数, 则

1. $(c_1 u(x) \pm c_2 v(x))' = c_1 u'(x) \pm c_2 v'(x)$;
2. $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$;
3. $(\dfrac{u(x)}{v(x)})' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}, v(x) \neq 0$.

定理 15.2. *设 $y = f(u)$ 可微, 则无论 u 是自变量, 还是中间变量, 总有 $df(u) = f'(u)du$. 该性质称为微分的形式不变性.*

15.2 18 个基本微分公式

a, α, c 为常数,$a > 0, a \neq 1$,u 是自变量或中间变量.

(1). $d(C) = 0 \cdot du$;

(2). $d(u^\alpha) = \alpha u^{\alpha-1} du$;

(3). $d(a^u) = a^u \ln a \cdot du$;

(4). $d(e^u) = e^u du$;

(5). $d(\ln u) = \dfrac{1}{u} du$;

(6). $d(\log_a u) = \dfrac{1}{u \ln a} du$;

(7). $d(\sin u) = \cos u du$;

(8). $d(\cos u) = -\sin u du$;

(9). $d(\tan u) = \sec^2 u du$;

(10). $d(\cot u) = -\csc^2 u du$;

(11). $d(\sec u) = \sec u \tan u du$;

(12). $d(\csc u) = -\csc u \cot u du$;

(13). $d(\arcsin u) = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$;

(14). $d(\arccos u) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$;

(15). $d(\arctan u) = \dfrac{1}{1+u^2} du$;

(16). $d(\mathrm{arccot} u) = -\dfrac{1}{1+u^2} du$;

(17). $d(\sinh u) = \cosh u du$;

(18). $d(\cosh u) = \sinh u du$.

15.3 例题

例 15.3. 设 $y = y(x)$, 由方程 $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \arctan\dfrac{y}{x}$ 确定, 求 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$.

例 15.4. 设 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$ 确定, 求 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$.

例 15.5. 设 $y = e^{-\arctan^3 \frac{1}{x^2}}$, 求 $dy, \dfrac{dy}{dx}$.

作业. ex3.2:2(2)(3)(4)(5)(6);3(1)(3);4;CH3:2.

第 16 讲　微分中值定理

16.1 内点与函数的极值

设 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义,$x_0 \in I$, 且 $\exists \delta > 0$, 使得 $\overline{U}(x_0, \delta) \subset I$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的内点. 若 $\forall x \in \overline{U}(x_0, \delta), f(x) \le f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处有极大值 $f(x_0)$, 极大值与极小值统称为极值.

注记 16.1. *函数 $f(x)$ 的极值只能在内点处渠道, 在 I 的边界点上只可能有 $f(x)$ 的最值, 而无极值.*

注记 16.2. 函数极值是一个局部概念, 因此同一个函数的极大值也许比极小值还小.

16.2 费尔玛 (Fermat) 定理, 罗尔 (Rolle) 定理, 拉格朗日 (Lagrange) 中值定理, 柯西 (Cauchy) 中值定理

定理 16.3. *Fermat 定理*

若 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义,$x_0\in I$, 且 $f(x_0)$ 是 f 在 I 上的一个极值, 若 $f'(x_0)$ 存在, 则必有 $f'(x_0)=0$. 称这种使得 $f'(x_0)=0$ 的点为 $f(x)$ 的驻点.

Fermat 定理告诉我们, 可导的极值点一定是驻点, 但驻点不一定是极值点. 如 $f(x)=x^3$ 在 $x=0$ 处有 $f'(0)=0$, 但 $f(x)$ 在 $x=0$ 处无极值.

定理 16.4. *Rolle 定理*

若 $y=f(x)$ 满足 $\begin{cases} f(x)\in C[a,b], \\ f(x)\in D(a,b), \\ f(a)=f(b), \end{cases}$, 则至少有一点 $\xi in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=0$. 即曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内至少有一点处的切线平行于 x 轴.

定理 16.5. *Lagrange 中值定理*

若 $y=f(x)$ 满足 $\begin{cases} f(x)\in C[a,b], \\ f(x)\in D(a,b), \end{cases}$, 则至少有一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$.

即曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内至少有一点处的切线与过 $A(a,f(a)),B(b,f(b))$ 的直线平行.

定理 16.6. *Cauchy 中值定理*

若 $y=f(x),y=g(x)$ 满足 $\begin{cases} f(x),g(x)\in C[a,b], \\ f(x),g(x)\in D(a,b), \\ g'(x)\neq 0, x\in(a,b), \end{cases}$, 则至少有一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

注记 16.7. 当 $g(x)=x$ 时,*Cauchy* 中值定理即为 *Lagrange* 中值定理.

当 $f(a)=f(b)$ 时,*Lagrange* 中值定理即为 *Rolle* 定理.

16.3 高阶微分未必有形式不变性

例 16.8. 设 $y = e^u, u = \sin x$, 则 $dy = e^u du = e^{\sin x} \cos x dx$.

$d^2y = d(dy) = d(e^{\sin x} \cos x dx)' = (e^{\sin x} \cos x dx)' dx = (e^{\sin x} \cos x dx)'(dx)^2 = e^{\sin x} \cos x dx \cos x dx = e^{\sin x} \cos^2 x dx^2 \neq e^u (du)^2 = y''(u)(du)^2$.

但当 u 是自变量时, 必有 $dy = y'(u)du, d^2y = y''(u)(du)^2$.

注记. 助教注:

$d^2y = d(dy) = d(y'(x)dx) = A(x)dx'dx$, 其中 dx 为自变量的极小增量, 而 dx' 为中间变量的极小增量, 将 $dx'dx$ 简记为 $(dx)^2$, 或者 dx^2.

作业. ex3.3:1,2,4(1),5(1),15,19(2),20(1)(4).

第 17 讲 微分中值定理及应用习题课

17.1 达布定理（Darboux）

定理 17.1. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导, 则

(1) $f'(x)$ 在 (a,b) 中无第一类间断点;

(2) 即使 $f'(x)$ 在 (a,b) 中不连续,$f'(x)$ 在 (a,b) 中仍满足介值性与零值性.

(3) 若 $f'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$, 则要么 $f'(x) > 0, \forall x \in (a,b)$, 要么 $f'(x) < 0, \forall x \in (a,b)$.

17.2 习题

例 17.2. 证明:

(1) $f(x)$ 在区间 I 上为常函数 $\Leftrightarrow f'(x) = 0, \forall x \in I$;

(2) 若 $f'(x) > 0, \forall x \in I$, 则 $f(x)$ 在 I 上严格单调增加.

例 17.3. 证明:

(1) 若 f 在 x_0 处连续, 且 $f'(x)$ 在 x_0 两侧存在, 异号,$f'(x_0)$ 可以不存在, 则 $f(x_0)$ 为 f 的极值点;

(2) 若 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0 (< 0)$, 则 $f(x_0)$ 必为 f 的极小值 (极大值) 点.

(3) 若 $f'(x_0) = f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0$, 则 $f(x_0)$ 不是 f 的极值点.

例 17.4. 证明以下不等式:

1. (1) $\dfrac{\beta-\alpha}{\cos^2\alpha} < \tan\beta - \tan\alpha < \dfrac{\beta-\alpha}{\cos^2\beta}$, $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$;

2. (2) $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, x>0$.

3. (3) $\tan x > x - \dfrac{x^3}{3}, 0<x<\dfrac{\pi}{2}$.

4. (4) $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x$,

$x - \dfrac{x^3}{3!} < \sin x < x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$,

$x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} < \sin x < x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \dfrac{x^9}{9!}, 0<x<\dfrac{\pi}{2}$.

例 17.5. 求 $f(x)=x^4-2x^2+5$ 在 $[-2,2]$ 上的最大值与最小值.

tips: 函数在 R 上连续可微, 则最值点要么是极值点要么边界点, 极值点处的导数为 0.

例 17.6. 机动题

证明二次曲线 $ax^2+by^2+cx+dy+e=0$ 上 $M_0(x_0,y_0)$ 处的切线方程为 $axx_0+byy_0+\dfrac{c}{2}(x+x_0)+\dfrac{d}{2}(y+y_0)+e=0$, 其中 a,b,c,d,e 为常数, 且 a,b 不全为 0.

作业. ex3.3:4(4),17,19(1),21(2),25,26.

第 18 讲 洛必达 (L'Hospital) 法则及其应用

18.1 "0/0" 型洛必达法则

设 $f(x),g(x)$ 在 (a,b) 中可微, 且 $g'(x)\neq 0$, 而 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$, 其中 $A\in R$ 或 $A=\infty$, 则 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$.

18.2 "$*/\infty$" 型洛必达法则

设 $f(x),g(x)$ 在 (a,b) 中可微, 且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}g(x)=0$, 而 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$, 其中 $A\in R$ 或 $A=\infty$, 则 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$.

注记 18.1. *当 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 仍然满足洛必达法则时, 可以继续使用洛必达法则. $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}=\cdots=\cdots$.*

如 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{2e^{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x}{4e^{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{8e^{2x}}=0$.

注记 18.2. *当 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在且是振荡不存在时, $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 也可能存在, 此时洛必达法则不适用, 如 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+\cos x}{x}=1$, 而 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{x}$ 不存在.*

也可以举例 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2\sin 1/x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}x\sin 1/x=0$, 而 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x\sin 1/x-\cos 1/x}{1}$ 不存在.

因此, 无论是 0/0 型, 还是 $*/\infty$ 中, 若 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 为振荡发散时, 则宜用别的方法计算 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, 洛必达法则此时不适用.

18.3 洛必达法则的应用举例

例 18.3. *计算下列极限:*

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x)$;
2. $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1}{\ln x}+\dfrac{1}{1-x}\right)$;
3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$;
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\dfrac{1}{\sqrt{x}}}$;
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^\alpha}{a^x}, a>1, \alpha>0$.
7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^m}{x^\alpha}, m>0, \alpha>0$.
8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^\alpha}, \alpha>0$.

作业. ex3.4:3,4,5(1)(12)(13)(14)(15);CH3:13.

第 19 讲　极限连续性, 可微性习题课

19.1　高阶微分未必有形式不变性

(1) 设 $y=f(x)$ 在 I 上二阶可导, 则 $dy=df(x)=f'(x)dx, d^2y=d(dy)=d(f'(x)dx)=(f'(x)dx)'dx=f''(x)dx'dx=f''(x)(dx)^2$.

此处 dx' 记号不是导数, 而是二阶增量.$dx'dx$ 简记为 $(dx)^2$, 或者 dx^2.

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=f''(x)$, 当 $f(x)$ n 阶可导时, 有 $\dfrac{d^ny}{dx^n}=f^{(n)}(x), n=1,2,3,\cdots$.

(2) 设 $y=f(x), x\in I, x=\varphi(t)$, 皆二阶可导, 则

$dy=df(x)=df(\varphi(t))=(f(\varphi(t)))'dt=f'(\varphi(t))\varphi'(t)dt=f'(x)dx$. 这是一阶形式不变性.

$d^y=d(dy)=d(f'(\varphi(t))\varphi'(t)dt)=(f'(\varphi(t))\varphi'(t)dt)'dt=f''(x)dx^2+f'(\varphi(t))\varphi''(t)dt^2\neq f''(x)(dx)^2$. 故高阶微分未必有形式不变性.

19.2　Henie 定理及其证明

设 $x_0\in R, \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a\in R \Leftrightarrow \forall\{a_n\}: a_n\to x_0, a_n\neq x_0$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=a$.

注记. *助教注: 也就是极限存在的时候, 可以交换极限与函数运算的次序.*

19.3　函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 收敛的 Cauchy 准则

设 $x_0\in R, \lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, s.t.\forall x_1, x_2\in U(x_0,\delta), |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

注意 $f'(x_0+0)$ 与 $f'_+(x_0)$ 的区别, 前者是右导数, 后者是右极限, 二者不一定相等.

例 19.1. $y=f(x)=sgnx=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$, 则 $f'(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ \text{不存在}, & x=0.\end{cases}$.

则 $f'(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=0, f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-0}{x-0}=\infty$.

例 19.2. $y=f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}, f'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$.

则 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=0$. 而 $f'(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^+}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$ 振荡发散.

19.4 展开

若 $f^{(2)}(x_0)$ 存在, 则 $\exists\delta>0, s.t.\forall x\in\bar{U}(x_0,\delta), f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$.

若 $f^{(3)}(x_0)$ 存在, 则 $\exists\delta>0, s.t.\forall x\in\bar{U}(x_0,\delta), f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dfrac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3)$.

若 $f^{(n)}(x_0)$ 存在, 则 $\exists\delta>0, s.t.\forall x\in\bar{U}(x_0,\delta), f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$.

19.5 极值点判断

(1) 设 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 若 $f'(x_0)$ 在 x_0 两侧存在, 异号, 则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极值点.$f'(x_0)$ 可以不存在. 这即极值存在的一阶导判别法.

(2) 若 $f'(x_0)=0, f''(x_0)>0(<0)$, 则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值 (极大值) 点. 此即极值存在的二阶导判别法.

(3) 若 $f'(x_0)=f''(x_0)=f^{(2n-1)}(x_0)=0, f^{(2n)}>0(<0)$, 则 $f(x_0)$ 必是 $f(x)$ 的极小值 (极大值) 点. 此即极值存在的高阶导判别法.

注记 19.3. *若 $f'(x_0)=f''(x_0)=0, f^{(3)}(x_0)\neq0$, 则 $M_0(x_0,f(x_0))$ 为连续曲线上凹凸部分的分界点, 称为连续曲线的拐点. 在高数中称点 M_0 为连续曲线的拐点, 在数分钟称其横坐标 x_0 为函数 $f(x)$ 的拐点.*

第 20 讲 曲线的凹凸与拐点

20.1 凸函数与拐点的定义

设 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上有定义, 若 $\forall x_1,x_2\in(a,b)$ 都有

$$f(\frac{x_1+x_2}{2})\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

, 则称 $f(x)$ 在 (a,b) 上为凸函数. 称 I 为 $f(x)$ 的凸区间. 当上式中仅成立严格不等号时, 则称 $f(x)$ 在 (a,b) 上为严格凸函数. 连续曲线上凹凸部分的分界点称

为拐点.

凹函数 (concave)$f(x)$ 定义为 $-f(x)$ 为凸函数 (convex).

例 20.1. $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为凸函数; $y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上为凹函数.

例 20.2. $y=\sin x$ 在 $(0,\pi)$ 上为凹函数, 在 $(\pi,2\pi)$ 上为凸函数. 且 $\sin x$ 处处连续, 因此 π 为 $\sin x$ 的拐点. 事实上 $f(x)=\sin x, g(x)=\cos x$ 在 $I=(-\infty,+\infty)$ 上都有无数个拐点.

20.2 凸函数及拐点判别法

定理 20.3. 凸性的零阶导判别法

设 $f(x)$ 在 I 上有定义, 若 $\forall x_1,x_2\in I,\forall\lambda_1,\lambda_2\in(0,1),\lambda_1+\lambda_2=1$ 都有 $f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\le\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)$, 则 $f(x)$ 在 I 上为凸函数.

定理 20.4. 零阶导判别法

$f(x)$ 在区间 I 上为凸函数 $\Leftrightarrow\forall x_1,x_2\in I,x_1<x_2$ 都有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

.

定理 20.5. 一阶导判别法

若 $f'(x)$ 在 I 上存在, 则 $f(x)$ 在 I 上为凸函数 $\Leftrightarrow f'(x)$ 在 I 上单调增.

定理 20.6. 二阶导判别法

若 $f''(x)$ 在 I 上存在, 则 $f(x)$ 在 I 上为凸函数 $\Leftrightarrow f''(x)\ge0,x\in I$.

定理 20.7. 若 x_0 是 $f(x)$ 的拐点, 且 $f''(x_0)$ 存在, 则 $f''(x_0)=0$, 但反之不必然.

定理 20.8. 若 $f(x)$ 在 x_0 处连续,$f''(x)$ 在 x_0 两侧存在, 异号,($f''(x_0)$ 可以不存在), 则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的拐点.

20.3 例题

例 20.9. 设 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, 求 $f(x)$ 的凸区间, 拐点; 求 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的极值与最值.

例 20.10. 设 $f(x)=\dfrac{c}{a+e^{-bx}},x\in(-\infty,+\infty)$, 其中 $a,b,c>0$.

(1) 证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 中无极值点;

(2) 证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 中有一个拐点.

此曲线称为逻辑斯蒂曲线 *(logistic curve)*, 或者称之为 S 型曲线.

作业. ex3.5:5,6,7,8(1)(4)(6),9;CH3:14(1)(4).

例 20.11. 思考题

求函数 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ 的凹凸区间, 拐点, 极值, 最值与图像.

第 21 讲　泰勒 (Taylor) 公式及其应用

21.1　具有 Peano 余项的 Taylor 公式

例 21.1. 设 $f''(x_0)$ 存在, 证明:$\exists\delta>0,\forall x\in U(x_0,\delta)$, 恒有 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$.

例 21.2. 设 $f'''(x_0)$ 存在, 证明:$\exists\delta>0,\forall x\in U(x_0,\delta)$, 恒有 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dfrac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3)$.

定理 21.3. 若 $f^{(n)}(x_0)$ 存在, 则 $\exists\delta>0,\forall x\in U(x_0,\delta)$, 恒有 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$.

记 $P_n(x)=\displaystyle\sum_{m=0}^{n}\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m$ 为 $f(x)$ 在 x_0 处的 n 阶 *Taylor* 多项式. 则 $f(x)=P_n(x)+o((x-x_0)^n)$, 其中 $o((x-x_0)^n)$ 称为皮亚诺 *(Peano)* 余项.

21.2　具有 Lagrange 余项的 Taylor 公式

定理 21.4. 设 $f(x)$ 在区间 I 中有 $n+1$ 阶导数, 则 $\forall x,x_0\in I$, 存在 $\xi\in U(x_0,x)$, 使得 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

称 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 为 $f(x)$ 的 n 阶 *Lagrange* 余项.

显然,Peano 余项 $o((x-x_0)^n)$ 是定性的, 而 Lagrange 余项 $R_n(x)$ 是定量的, 且后者显然是包含前者的, 即 $R_n(x)=o((x-x_0)^n)$.

注记 21.5. *Peano 余项的 Taylor 公式称之为局部 Taylor 公式, 因为此公式仅在 $U(x_0,\delta)$ 上成立.*

而 Lagrange 余项的 Taylor 公式称之为整体 Taylor 公式, 因为此公式在整个区间 I 上任意一点 x 上成立. 但代价则是对条件要求高一阶导.

注记 21.6. *无论是 Peano 余项还是 Lagrange 余项, 都是用来估计 $f(x)$ 与 $P_n(x)$ 的误差的, 这表明: 函数 $f(x)$ 在指定点 x_0 处的 n 阶 Taylot 公式由 $f(x)$ 及 x_0 唯一确定.*

特别地, 当 $x_0=0$ 时, 分别有:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n);$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

前者称为具有 Peano 余项的麦克劳林 Maclaurin 公式, 后者称为具有 Lagrange 余项的麦克劳林公式.

21.3 五个经典 Taylor 公式

(1) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}, x\in(-\infty,+\infty), 0<\xi<x \ or \ x<\xi<0$.

(2) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1}), x\in(-\infty,+\infty)$.

(3) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n}), x\in(-\infty,+\infty)$.

(4) $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n), x\in(-1,+\infty)$.

特别地, 当 $\alpha\in N^*$ 时, 为二项式定理.

(5) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n), x\in(-1,+\infty)$.

21.4 应用举例

例 21.7. *证明 e 为无理数.*

例 21.8. *若 $f^{(k)}(x_0)=0, k=1,2,\cdots,m-1, f^{(m)}(x_0)>0(<0)$, 则当 $m=2n, n\in N^*$ 时,x_0 为 $f(x)$ 的拐点, 但不是 $f(x)$ 的极值点.*

例 21.9. 求 $f(x)=\dfrac{x^3+2x+1}{x-1}$ 的 n 阶 *Maclaurin* 展开式.

$$f(x)=x^2+x+3-\frac{4}{x-1}=-1-3x-3x^2-4x^3-\cdots-4x^{n-1}+o(x^n).$$

例 21.10. 求 $f(x)=\cos^2 x$ 的 $2n$ 阶 *MacLaurin* 展开式.

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x=1-\frac{2^1}{2!}x^2+\frac{2^3}{4!}x^4-\cdots+(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n}).$$

作业. ex3.6:1(2),3,5,7;CH3:10,15.