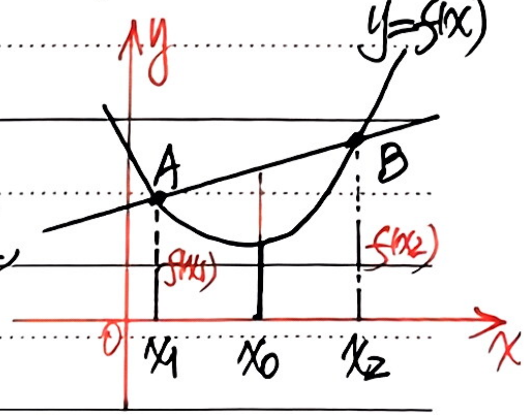
第20讲：曲线的凹凸与拐点 (inflection point)

(一) 凸函数与拐点的定义：



$x_0=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$

设 $y=f(x)$ 在区间 I 上连续，且对 $\forall x_1,x_2\in I$，$(x_1<x_2)$，曲线 $y=f(x)$ 总在相应的割线 AB 的下方，即恒有：

$$f\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)\le \frac{1}{2}\left(f(x_1)+f(x_2)\right),\ \forall x_1,x_2\in I,(x_1<x_2) \quad (*1)$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是凸函数，曲线 $y=f(x)$ 为凸曲线，而称 I 为凸区间，当 $(*1)$ 中仅有不等号成立时，称 $f(x)$ 为 I 上的严格凸函数。连续曲线上凹凸部分的分界点 $M_0(x_0,f(x_0))$ 称为曲线的拐点，教科书中也称横坐标 x_0 为拐点。此处，凹函数 $f(x)$ 是指在 I 上，$-f(x)$ 是凸函数。

凸：convex
凹：concave

例1. $y=x^2$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 中的凸函数；$y=\ln x$ 是 $(0,+\infty)$ 中的凹函数。例2. $y=\sin x$ 在 $(0,\pi)$ 中为凹函数，在 $(\pi,2\pi)$ 中为凸函数，且 $\sin x$ 处处连续，故 $x=\pi$ 是 $y=\sin x$ 的一个拐点。

函数2，$f(x)=\sin x$、$\cos x$ 在 $I=(-\infty,+\infty)$ 中都有无数个

拐点：$(k+1)\pi$，$(k+\frac{1}{2})\pi$，$k\in Z$.

(三) 下凸函数及拐点判别法：

Th1：（下凸性的等价判别法）：设 $f(x)$ 定义在区间 I 上，

若对 $\forall x_1,x_2\in I$，$(x_1<x_2)$，$\forall \lambda_1,\lambda_2\in(0,1)$，$\lambda_1+\lambda_2=1$，恒有：

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\le\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2) \qquad (※2)$$

则 $f(x)$ 是 I 上的下凸函数，反之亦然。

证：当(※2)成立时，取 $\lambda_1=\lambda_2=\frac{1}{2}$，则 $\lambda_1,\lambda_2\in(0,1)$ 且 $\lambda_1+\lambda_2=1$.

且 $f(\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2)\le\frac{1}{2}f(x_1)+\frac{1}{2}f(x_2)\Leftrightarrow f(\frac{x_1+x_2}{2})\le\frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))\Rightarrow f(x)$

是 I 上的下凸函数。反之，若 $f(x)$ 是 I 上的下凸函数，则 $f(x)\le g(x)$.

$\forall x\in(x_1,x_2)$，$g(x)$ 是相应的割线上的函数值 且 $g(x)=f(x_1)+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)$

即 $f(x)\le f(x_1)+(f(x_2)-f(x_1))\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$，由 $x_1<x<x_2\Rightarrow 0<x-x_1<x_2-x_1$

$\Rightarrow 0<\frac{x-x_1}{x_2-x_1}<1$. 令 $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\lambda_2$ 则 $\lambda_2\in(0,1)$ 且 $1-\lambda_2=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}\triangleq\lambda_1$

$\Rightarrow \lambda_1\in(0,1)$ 且 $\lambda_1+\lambda_2=1$，从 $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\lambda_2\Rightarrow x=x_1+\lambda_2(x_2-x_1)=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2$ (2)

即 $f(x)\le f(x_1)+(f(x_2)-f(x_1))\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=(1-\lambda_2)f(x_1)+\lambda_2f(x_2)$.

可逆形式: $f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\le\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)$, $0<\lambda_1,\lambda_2<1$, $\lambda_1+\lambda_2=1$.

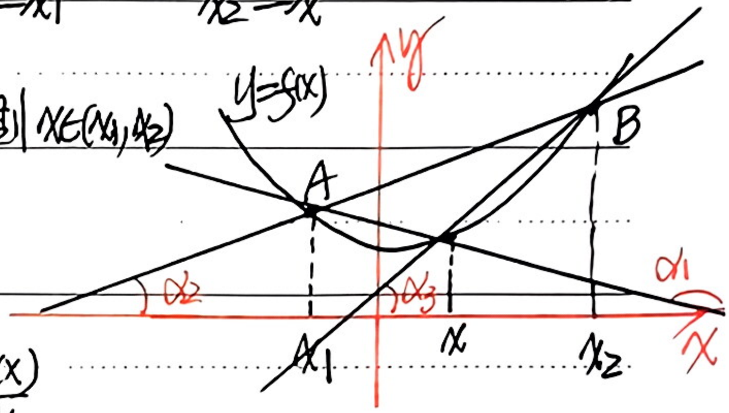
即对 $\forall\lambda_1,\lambda_2\in(0,1)$ 且 $\lambda_1+\lambda_2=1$, 若恒有: (对 $\forall x_1,x_2\in I$, $(x_1<x_2)$)

$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\le\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)$, 则 f 在 I 上是凸函数, 反之亦然。

Th2: (斜率判别法): $f(x)$ 在区间 I 上为凸函数 $\Longleftrightarrow$ 对 $\forall x_1,x_2\in I$,

$x_1<x_2$, 恒有: $\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\le\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\dfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$ (式3)

证Th2, 若 $f(x)$ 为 I 上的凸函数, 则 $x\in(x_1,x_2)$



时, $\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=\tan\alpha_1<0$,

$0<\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\tan\alpha_2<\tan\alpha_3=\dfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$,

$\frac{\pi}{2}>\alpha_3>\alpha_2>0$; $\frac{\pi}{2}<\alpha_1<\pi$

故(式3)成立。

反之, 当(式3)成立时, 对 $\forall x\in(x_1,x_2)$, 恒有 $\dfrac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\le\dfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$

$\Longleftrightarrow f(x)\le f(x_1)+\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)$ 即(式1)成立, 从而 f 在 I 上凸。

Th3 (凸性的一阶导数判别法): 若 $f(x)$ 在区间 I 上可导, 则

$f(x)$ 在 I 上凸(凹) $\Longleftrightarrow f'(x)$ 在 I 上单调增(减) (式4)

证Th3 "⇒" 已知 f 在 I 上凸，则对 $\forall x_1<x_2$，$x_1,x_2\in I$，有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$ 且 $f'(x_1)$，$f'(x_2)$ 存在。

从 $f'(x_1)=f'_+(x_1)=\lim\limits_{x\to x_1^+}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\le\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\lim\limits_{x\to x_2^-}\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}=f'_-(x_2)=f'(x_2)$

由 x_1,x_2 在 I 中取的任意性知，$f'(x)$ 在 I 上单增。

"⇐" 已知 $f'(x)$ 在 I 上存在，单增。对 $\forall x_1,x_2\in I$，$x_1<x_2$ 及 $x_1<x_0<x_2$

这里 $x_0=\alpha x_1+(1-\alpha)x_2$，$\forall\alpha\in(0,1)$，有

$\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)-f(x_0)=\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)-(\alpha+(1-\alpha))f(x_0)$

$=(1-\alpha)(f(x_2)-f(x_0))-\alpha(f(x_0)-f(x_1))\xrightarrow[\exists\xi_1\in(x_1,x_0),\ \xi_2\in(x_0,x_2)]{\text{Lagrange th},\ x_1<\xi_1<x_0<\xi_2}$

$=(1-\alpha)f'(\xi_2)(x_2-x_0)-\alpha f'(\xi_1)(x_0-x_1)$

而 $x_2-x_0=x_2-(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)=\alpha(x_2-x_1)$，$x_0-x_1=(1-\alpha)(x_2-x_1)$

故 $\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)-f(x_0)=\alpha(1-\alpha)(x_2-x_1)(f'(\xi_2)-f'(\xi_1))\ge0$

从而 $f(x_0)=f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\le\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$ 恒成立 $\Rightarrow f$ 在 I 上凸。

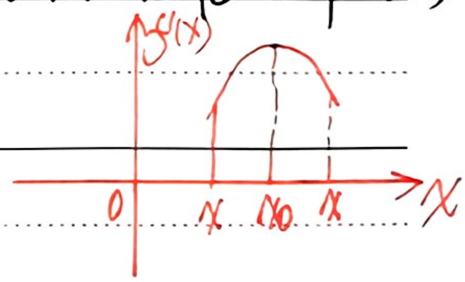
Th4（凸性的二阶导数判法）：若 $f''(x)$ 在区间 I 上存在，则

$f(x)$ 在 I 上凸（凹）$\Longleftrightarrow f''(x)\ge0\ (\le0)$，$\forall x\in I$.　（略）

证 Th4：∵ $f''(x)$ 在 I 上存在，∴ $f'(x)$ 在 I 上存在，依 Th3，
$f(x)$ 在 I 上凸（凹）$\Longleftrightarrow$ $f'(x)$ 在 I 上单调增（减）$\Longleftrightarrow$ $(f'(x))' \geq 0$ (≤ 0)，$\forall x \in I$ $\Longleftrightarrow$ $f''(x) \geq 0$ (≤ 0)，$\forall x \in I$.

Th5：若 x_0 是 $f(x)$ 的拐点，且 $f''(x_0)$ 存在，则 $f''(x_0)=0$，但反之未必。

证 Th5：设 $f(x)$ 在 x_0 的左侧为凸，x_0 的右侧为凹.
由 $f''(x_0)$ 存在知，$f'(x)$ 在 x_0 两侧存在，且在 x_0 左侧 $f'(x)$ 单调增，在 x_0 右侧 $f'(x)$ 单调减. 从而



$$\begin{cases} f''(x_0)=f''_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}\geq 0 \\ f''(x_0)=f''_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}\leq 0, \end{cases}$$ 故 $f''(x_0)=0$.

但 $f''(x_0)=0$ 并不能保证 x_0 是 $f(x)$ 的拐点。如 $f(x)=x^4$ 无拐点，但 $f''(0)=12x^2\big|_{x=0}=0$，但 $x_0=0$ 不是 $f(x)=x^4$ 的拐点。

Th6：若 $f(x)$ 在 x_0 处 C，$f''(x)$ 在 x_0 两侧存在、异号（$f''(x_0)$ 可以不存在），则 x_0 必是 $f(x)$ 的拐点。

证 (b)：设 $\exists\delta>0$，使 $f''(x)>0,\ x\in(x_0-\delta,x_0)$，$f''(x)<0,\ x\in(x_0,x_0+\delta)$

则 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 中凸，在 $(x_0,x_0+\delta)$ 中凹，且 $f(x)$ 在 x_0 处连续，

故 x_0 是 $f(x)$ 的一个拐点。

(三) 例题

例1. 设 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

(1) 求 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的凹凸区间与拐点；

(2) 求 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的极值与最值。

例2. 设 $f(x)=\frac{c}{a+e^{-bx}}$，$x\in(-\infty,+\infty)$，a,b,c 为正的常数。

(1) 证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 中无极值点；

(2) 证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 中有一个拐点。

解 例1 (1) $\because f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)$，$f''(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)^2+e^{-\frac{x^2}{2}}(-1)\right)$

$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}(x+1)(x-1)$，令 $f''(x)=0 \Rightarrow x_1=-1,\ x_2=1$.

且在 $(-\infty,-1)$ 与 $(1,+\infty)$ 上 $f''(x)>0$，在 $(-1,1)$ 中，$f''(x)<0$ 从而

$f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$，$(1,+\infty)$ 上为凸函数，$(-\infty,-1)$，$(1,+\infty)$ 为凸区间.

$f(x)$在$(-1,1)$中为凹函数，$(-1,1)$为$f(x)$的凹区间.

$f(x)$在$x_1=-1$，$x_2=1$处均C，且在x_1两侧，x_2两侧$f''(x)$存在，

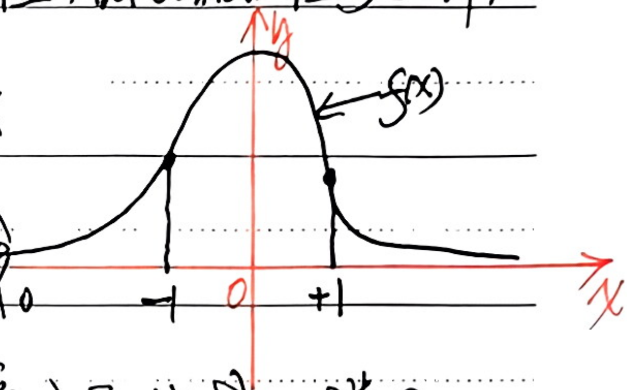
异号，故$x_1=-1$，$x_2=1$都是$f(x)$的拐点。

解例1(2). 由$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)$知，$x<0$时$f(x)$单增，

$x>0$时，$f(x)$单减$\Rightarrow f(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$是$f(x)$的极大值. 且$f(x)$在

$(-\infty,+\infty)$中只有一个极大值并且无极小值，故此极大值$f(0)$即为

$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$中的最大值。如图所示



$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$称为正态分布的概率曲线。

确切地说，是标准正态分布的概率分布曲线。横轴之上，

曲线之下所夹的面积恰好是1。

证例2(1). $\because f'(x)=\frac{-ce^{-bx}(-b)}{(a+e^{-bx})^2}=\frac{bce^{-bx}}{(a+e^{-bx})^2}>0$，$\forall x\in R$.

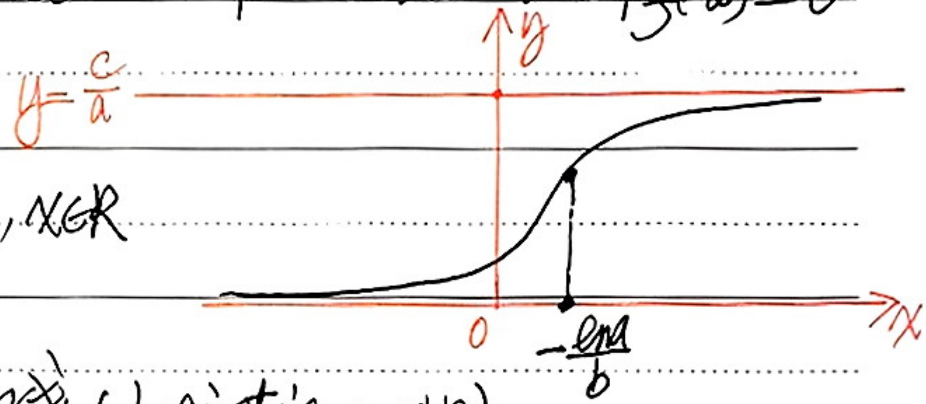
$\therefore f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单增，从而无极值。

证例2(2) $\because f''(x)=bc\,\frac{e^{-bx}(-b)(a+e^{-bx})^{2}-2(a+e^{-bx})^{\cancel{2}}e^{-bx}(-b)e^{-bx}}{(a+e^{-bx})^{\cancel{4}\,3}}$

$$= bc\,\frac{(-b)e^{-bx}(a+e^{-bx})+2b(e^{-bx})^2}{(a+e^{-bx})^3} = \frac{b^2ce^{-bx}(e^{-bx}-a)}{(a+e^{-bx})^3}$$

①当 $e^{-bx}-a>0 \Leftrightarrow -bx>\ln a \Rightarrow x<-\frac{\ln a}{b}$ 时，$f''(x)>0 \Rightarrow f(x)$ 在 $(-\infty,-\frac{\ln a}{b})$ 上为凸函数，②当 $e^{-bx}-a<0$ 即 $x>-\frac{\ln a}{b}$ 时 $f''(x)<0$ 即 $f(x)$ 在 $(-\frac{\ln a}{b},+\infty)$ 上为凹函数。且 $f(x)$ 在 $x_0=-\frac{\ln a}{b}$ 时C，故 $x_0=-\frac{\ln a}{b}$ 是 $f(x)$ 的唯一拐点。另有 $\begin{cases} f(+\infty)=\frac{c}{a} \\ f(-\infty)=0 \end{cases}$

曲线 $f(x)=\frac{c}{a+e^{-bx}}$，$x\in R$



称为逻辑斯谛曲线（Logistic curve），或者称之为S形曲线。它在许多研究领域，都有广泛应用。

(四)作业：ex3.5 / 5; 6; 7; 8/(1),(4),(6); 9;

ch3综/ 14/(1),(4).

思考题，求出 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ 的凹凸区间、拐点、极值、最值与图像。