数分B1第1讲：数列极限（sequence limit）

（一）几个常用的记号：

(1). $\forall \leftarrow A \leftarrow$ any：任意给定的一个，给定后为常数。

(2). $\exists \leftarrow E \leftarrow$ exist：存在一个，通常不唯一。

(3). $\sup E$：数集E的最小上界，即E的上确界（supremum）.

$\sup E$同时满足两条件：$\begin{cases} ① \text{ 对} \forall x \in E, \text{恒有 } x \le \sup E; \\ ② \text{ 对} \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in E, \text{使 } x_0 > \sup E - \varepsilon \end{cases}$

(4). $\inf E$：数集E的最大下界，即E的下确界（infimum）

$\inf E$同时满足：$\begin{cases} ① \text{ 对} \forall x \in E, \text{恒有 } x \ge \inf E; \\ ② \text{ 对} \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in E, \text{使 } x_0 < \inf E + \varepsilon. \end{cases}$

例1. 设 $E = \{1, 3, 5, 8\}$，$F = (-\sqrt{3}, \pi]$，则.

$\sup E = 8$，$\inf E = 1$，$\sup F = \pi$，$\inf F = -\sqrt{3}$，且 $\begin{cases} \sup E = -\inf(-E) \\ \sup F = -\inf(-F) \end{cases}$

（二）微积分或数学分析必须建立在实数集R上.

理由：极限运算是微积分的最基本运算，而有理数

集Q关于极限运算是不封闭的。例如：

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$；对$\forall n\in N^*$，$a_n=(1+\frac{1}{n})^n\in Q$，但$a_n$的极限值e却是无理数；又如，对$\forall n\in N^*$，$a_n=\sum\limits_{m=1}^{n}\frac{1}{m^2}\in Q$，但$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{m=1}^{n}\frac{1}{m^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$是无理数。

实数集R在数轴上的点是连续不断的，且关于极限运算是封闭的。因此，称实数集R具有连续性。实数集R的连续性也称为实数集R的完备性。

描述实数集R连续性的公理通常有五个：

(1).确界存在定理；(2).单调有界极限存在准则；(3).极限存在的柯西(Cauchy)准则；(4).闭区间套定理；(5).列紧性定理，即"有界数列必有收敛的子列"定理。

这五个公理是相互等价的，本课程采用"确界存在定理"，即"有上(下)界的数集E，必有上(下)确界supE(infE)"作为实数集R连续性的公理。

(三) 数列极限的精确定义：

设数列$\{a_n\}$以常数a为极限，精确的定义如下：

对$\forall \varepsilon>0$（无论它多么小），若$\exists N\in N^*$，对$\forall n>N$，恒有

$|a_n-a|<\varepsilon$成立，则称$\{a_n\}$以常数a为极限，记作：

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$，或 $a_n\longrightarrow a\ (n\to\infty)$.

这时，也称数列$\{a_n\}$收敛于(convergence)常数a.

事实上，所有的收敛的有理数列，其极限点的全体即是实数集R，即实数集R是由收敛有理数列的极限值构成的。理由如下：

对$\forall x\in R$，设x的小数表示为：$x=a_0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots$，则有理数列：$a_0, a_0.a_1, a_0.a_1a_2, a_0.a_1a_2a_3, \cdots, a_0.a_1a_2\cdots a_n, \cdots$

当$n\to\infty$时，以常数x为极限。若x是有限小数或无限循环小数，则极限点x是有理数；若x是无限不循环小数，则极限点x是无理数。

(四) 极限存在的两个常用准则

(1). 单调有界极限存在准则：若数列$\{a_n\}$单增(或减)且$\{a_n\}$有上(下)界，则$\{a_n\}$必有极限，且

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$ ($\inf\{a_n\}$).

(2). 夹逼准则(即两边夹准则)：设 $a_n \le b_n \le c_n$, $\forall n \ge n_0 \in N^*$, 且有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$，则必有 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.（$a$为常数）.

证(1)：设$\{a_n\}$单增且有上界，依确界存在原理，$\{a_n\}$有上确界．令$\sup\{a_n\} = \beta$，则β这个常数同时满足：

① 对$\forall n \in N^*$, $a_n \le \beta$. ② 对$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in N^*$, 使$a_{n_0} > \beta - \varepsilon$.

又$\{a_n\}$单增，对$\forall n > n_0 \Rightarrow a_n \ge a_{n_0} > \beta - \varepsilon$，且$a_n \le \beta < \beta + \varepsilon$.

即 $\beta - \varepsilon < a_n < \beta + \varepsilon$ 在$n > n_0$时恒成立，即$|a_n - \beta| < \varepsilon$ 在$n > n_0$时恒成立．依数列极限的ε-N定义，有

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \beta = \sup\{a_n\}$. 同理，若$\{a_n\}$单减且有下界，则

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha = \inf\{a_n\}$. α是常数。

(4).

证(2)：从 $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0$，$\exists N_1 \in N^*$，对 $\forall n>N_1$，$|a_n - a| < \varepsilon$，
①

$\Rightarrow a-\varepsilon < a_n$ 当 $n>N_1$ 时恒成立。再从 $\lim_{n\to\infty} c_n = a \Rightarrow$ 对上述 $\varepsilon>0$，$\exists N_2 \in N^*$，对 $\forall n>N_2$，$|c_n - a| < \varepsilon$，即 $c_n < a+\varepsilon$ 当 $n>N_2$ 时恒成立，取 $N=\max\{N_1, N_2, n_0\}$，则对 $\forall n>N$ 恒有：
② ③

$a-\varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < a+\varepsilon$ 即 $|b_n - a| < \varepsilon$ 恒成立，由上述的
④

①，②，③，④ 知 $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

(五) 例题.（设 a, b, q, c_1, c_2 均为常数）.

(1). 设 $|q|<1$，则 $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$；

(2). 设 $a>0$，则 $\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$；

(3). 证明：$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$；

(4). 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，$\lim_{n\to\infty} b_n = b$，则 $\lim_{n\to\infty}(c_1 a_n + c_2 b_n) = c_1 a + c_2 b = c_1 \lim_{n\to\infty} a_n + c_2 \lim_{n\to\infty} b_n$，即线性组合的极限，等于极限的线性组合，称(4)为数列极限的线性性质。

证(1)：1°) 当 $q=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} q^n=\lim\limits_{n\to\infty} 0^n=\lim\limits_{n\to\infty} 0=0$（常数的极限是它本身）.

2°) 当 $0<|q|<1$ 时，对 $\forall\, 0<\varepsilon<1$，设 $|q^n-0|<\varepsilon$，只要 $n\ln|q|<\ln\varepsilon$，

即 $n>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$，取 $N=\left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]+1$，则 $N\in\mathbb{N}^*$，且对 $\forall n>N$

有 $n>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\Leftrightarrow|q^n-0|<\varepsilon$ 恒成立. 故 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$.

综上 (1°),(2°) 可知，$\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$，$|q|<1$.

证(2)：设 $a>1$ 则 $a^{\frac{1}{n}}>1$ 设 $a^{\frac{1}{n}}=1+\lambda_n$，则 $\lambda_n>0$ 且

$a=(1+\lambda_n)^n>n\lambda_n \Rightarrow 0<\lambda_n<\dfrac{a}{n}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} 0=0=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a}{n}$，

依夹逼准则，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=0$ 即 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{\frac{1}{n}}-1)=0\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1$；若 $0<a<1$，令 $a=\dfrac{1}{b}$，则 $b>1$，且 $a^{\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{b^{\frac{1}{n}}}$，

$\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b^{\frac{1}{n}}}=\dfrac{1}{1}=1$；若 $a=1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty} 1=1$.

综上，有 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$，其中 a 是正的常数。

证(3)：当 $n\geqslant 2$ 时，$\sqrt[n]{n}>1$，设 $\sqrt[n]{n}=1+\lambda_n$，则 $\lambda_n>0$，

且 $n=(1+\lambda_n)^n>C_n^2\lambda_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}\lambda_n^2\Rightarrow 0<\lambda_n<\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$，

且 $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0 = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{n-1}}$，依夹逼准则，有 $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$。

即 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n}-1) = 0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$

(4)(i) 若 $c_1 = c_2 = 0$ 时，结论显然成立。(4)(ii) 若 $c_1^2 + c_2^2 > 0$ 时（$|c_1|+|c_2|>0$，且）

证明：由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow$ 对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N_1 \in N^*$，当 $n > N_1$ 时，

$|a_n - a| < \varepsilon$；由 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$，对上述 $\varepsilon > 0$，$\exists N_2 \in N^*$，当 $n > N_2$ 时，

$|b_n - b| < \varepsilon$ 恒成立。取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，则当 $n > N$ 时，

$|c_1 a_n + c_2 b_n - (c_1 a + c_2 b)| \le |c_1||a_n - a| + |c_2||b_n - b| < |c_1|\varepsilon + |c_2|\varepsilon$

$= (|c_1| + |c_2|)\varepsilon$。从而，$\lim\limits_{n\to\infty}(c_1 a_n + c_2 b_n) = c_1 a + c_2 b = c_1\lim\limits_{n\to\infty} a_n + c_2\lim\limits_{n\to\infty} b_n$。

数列的极限具有线性性质，同理，函数极限也具有线性性质，统称为极限的线性性质。由极限的线性性质，可导出微积分中绝大多数概念也具有线性性质。如函数的导数、微分、积分，都具有线性性质。

(5) 作业：$EX1.2$.

1/(2),(4)；3；4；5；6；8/(5)；15/(1)；19.

(七)、关于随堂测验与作业：

①. 随堂测验将不定期举行，每次约20分钟，要求所有同学参加。测验的成绩约占课程总成绩的10%；

②. 作业每周交一次，并在周一上午上课前交给自己班里的助教。每人须至少准备两本作业本，轮换交给助教批改，作业须按时按量完成。作业成绩约占课程总成绩的20%；

(八). 本课程的教学团队成员的联系方式：

①. 讲师：汪晓庭，13855104751，wanght@ustc.edu.cn；

②. 助教：朱浩然，15066663997，ustc_zhr123@mail.ustc.edu.cn.

③. 助教：刘越，13662676156，liuyue22@mail.ustc.edu.cn.

④. 助教：吕长乐，18805643579，lcl20060401lcl@mail.ustc.edu.cn、

附 本课程参考书目：

(九) 参考书目:

(1). 常庚哲、史济怀《数学分析教程》(上、下), 高教社.

(2). 陈纪修等《数学分析》(上、下) 高教社.

(3). 谢惠民《数学分析习题课讲义》(上、下) 高教社.

(4). 谢惠民《吉米多维奇数学分析习题学习指引》, 高教社.

(5). [illegible]等《[illegible]数学分析学习指导》(上、下), 中科社.

(6). 裴礼文《数学分析中的典型问题与方法》, 高教社.

(7). 同济大学《高等数学》(上、下、第七版), 高教社.

(十). 关于辅导答疑:

(1). 每周都安排了助教的辅导答疑课, 通常安排在周末;

(2). 辅导答疑的具体时间地点由助教公布在课程QQ群中, 请同学们注意查看。