1 数列极限

1.1 几个常用的记号

1. $\forall \leftarrow A \leftarrow any$: 任意给定的一个；给定后为常数
2. $\exists \leftarrow E \leftarrow exist$: 存在一个；通常不唯一
3. $\sup E$: 数集 E 的最小上界，即 E 的上确界（supremum）

   $\sup E$ 同时满足两条件：

   (a) $\forall x \in E, x \leq \sup E$;

   (b) $\forall \varepsilon > 0, \exists\, x_0 \in E, \sup E - \varepsilon < x_0$.
4. $\inf E$: 数集 E 的最大下界，即 E 的下确界（infimum）

   $\inf E$ 同时满足两条件：

   (a) $\forall x \in E, x \geq \inf E$;

   (b) $\forall \varepsilon > 0, \exists\, x_0 \in E, x_0 < \inf E + \varepsilon$.

例 1.1. *设* $E = \{1,3,5,8\} F = (-\sqrt{3}, \pi]$, *则:*

$\sup E = 8, \inf E = 1, \sup F = \pi, \inf F = -\sqrt{3}$. *且有*

1. $\sup E = -\inf(-E)$*;*

2. $\inf F = -\sup(-F)$*;*

注记. 这里的 $-E$ 表示 E 的相反数集合，即 $-E = \{-e : e \in E\}$.

1.2 微积分或数学分析必须建立在实数系上 R 上

理由: 极限运算时微积分的最基本运算, 而有理数集合 Q 关于极限运算时不封闭的. 例如: $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n = e; \forall n \in N, (1+\dfrac{1}{n}) \in Q$, 但 $e \notin Q$.

又如,$\forall n \in N, a_n = \sum_{m=1}^{n} \dfrac{1}{m^2} \in Q$, 但 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{\pi^2}{6} \notin Q$.

实数集合 R 在数轴上的点是连续不断的, 且关于极限运算时封闭的. 因此, 称实数集 R 是具有连续性. 实数集 R 的连续性也称为实数集的完备性.

描述实数集 R 连续性的公理通常有五个:

1. 确界存在原理;

2. 单调有界极限存在准则;
3. 极限存在的柯西 (Cauchy) 准则;
4. 闭区间套定理;
5. 列紧性原理, 即有界数列必有收敛子列定理.

这五个公理是互相等价的, 本课程采用" 确界存在原理" 作为实数集 R 连续性的公理.

注记. *这五条公理与课本 1.1.3 的连续性公理是等价的, 即任意一个公理都可以推导出另外四个公理. 因此这里说这五个等价命题描述了 R 的连续性.*

公理 1.2. *确界存在原理*

有上 (下) 界的非空实数集 E 必有上 (下) 确界 $\sup E(\inf E)$.

1.3 数列极限的科学定义

设数列 $\{a_n\}$ 以常数 a 为极限, 科学的定义如下:

$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in N*, \forall n > N$ 都有 $|a_n - a| < \varepsilon$ 成立, 则 $\{a_n\}$ 以常数 a 为极限, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 或 $a_n \to a(n \to \infty)$.

事实上, 所有的收敛的有理数列, 其极限点的全体即是实数集 R. 即实数集 R 是有理数列的极限值构成的.

注记. *1.Q 对极限是不封闭的; 2. 由 Q 组成的数列的极限可以是实数; 3. 由 Q 组成的数列的极限只能是实数; 4. 由 Q 组成的所有收敛数列, 他们的极限的集合, 恰好就是 R, 不多不少.*

理由如下:

对 $\forall x \in R$, 设 x 的小数表示为:$x = a_0.a_1a_2a_3\cdots$, 则有理数列:$a_0, a_0.a_1, a_0.a_1a_2, \cdots$ 当 $n \to \infty$ 时, 其极限为 x. 若 x 是有理数, 则 $a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 是有限小数或循环小数, 若 x 是无理数, 则 $a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 是无限不循环小数, 则极限点 x 是无理数.

注记. *此处 $x = a_0.a_1a_2a_3\cdots$, 其中每一个 a_i 都是一个数字, a_0 是整数部分, $a_1a_2a_3\cdots$ 是小数部分. 比如, $x = 3.1415926\cdots$, 那么 $a_0 = 3, a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 1, a_4 = 5, a_5 = 9, a_6 = 2, a_7 = 6, \cdots$.*

可以由 $x = a_0.a_1a_2a_3\cdots$ 构造出一个数列 $\tau_1 = a_0, \tau_2 = a_0.a_1, \tau_3 = a_0.a_1a_2, \cdots$, 说 x 为极限指的, 是 x 是数列 $\{\tau_n\}$ 的极限, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n = x$.

都用 x 代指, 是因为我这里不能确定 x 是不是有限小数, 有理数还是无理数. 但是 x 是数列 $\{\tau_n\}$ 的极限是确定的.

1.4 极限存在的两个常用准则

1. 单调有界极限存在准则: 若数列 $\{a_n\}$ 单调增 (减) 且有上 (下) 界, 则 $\{a_n\}$ 收敛. 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup a_n (\inf a_n)$.

2. 夹逼准则 (即两边夹准则): 设数列 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 满足 $a_n \le b_n \le c_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

证明. 单调增有界极限存在.

设数列 $\{a_n\}$ 单调增且有上界, 由确界存在定理,$\{a_n\}$ 有上确界. 令 $\sup a_n = \beta$, 则 β 是 $\{a_n\}$ 满足以下两点:

1. $\forall n \in N, a_n \le \beta$;

2. $\forall \varepsilon > 0, \exists a_{n_0} \in \{a_n\}, \beta - \varepsilon < a_{n_0}$.

又因为 $\{a_n\}$ 单调增, 故 $\forall n > n_0, a_n \le a_{n_0} > \beta - \varepsilon$, 且 $a_n \ge \beta < \beta + \varepsilon$. 即 $|\beta - a_n| < \varepsilon$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \beta$. □

证明. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in N*, \forall n > N, |a_n - a| < \varepsilon$. 又 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in N*, \forall n > N, |c_n - a| < \varepsilon$.

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则 $\forall n > N, a_n \le b_n \le c_n$, 故 $a - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < a + \varepsilon$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$. □

例 1.3. *下列 a, b, q, c_1, c_2 皆为常数).*

1. *设 $|q| < 1$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} aq^n = 0$;*
2. *设 $a > 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$;*
3. *证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;*
4. *设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} (c_1 a_n + c_2 b_n) = c_1 a + c_2 b$. 即线性组合的极限等于极限的线性组合, 称此为极限的线性性质.*

数列的极限具有线性性质, 同理函数极限也是具有线性性质的, 统称为极限的线性性质. 由极限的线性性质, 可导出微积分中绝大多数概念也具有线性性质. 如函数的导数、导数、微分、积分, 都具有线性性质.

作业. ex1.2. 1(2)(4) ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8 (5) ; 15(1) ; 19.